Aljabar Linear

**“Soal Pembahasan Determinan Tiga Bagian, Eigen Value**

**dan LU-Dekomposisi”**

Daftar Isi

[BAB 1 DETERMINAN TIGA BAGIAN 3](#_Toc165483378)

[**A.** **Determinan Cramer** 3](#_Toc165483379)

[**Soal dan Pembahasan** 4](#_Toc165483380)

[**B.** **Determinan Reduksi Baris** 47](#_Toc165483381)

[**Soal Dan Pembahasan** 48](#_Toc165483382)

[**C.** **Determinan Minor Dan Kofaktor** 77](#_Toc165483383)

[**Soal Dan Pembahasan** 78](#_Toc165483384)

[BAB 2 EIGEN VALUE 105](#_Toc165483385)

[**A.** **Eigen Value** 105](#_Toc165483386)

[**B.** **Eigen Vektor** 127](#_Toc165483387)

[BAB 3 LU-DECOMPOSITION 134](#_Toc165483388)

[**A.** **An LU-Decomposition** 136](#_Toc165483389)

[**B.** **Solving Ax = b by LU-Decomposition** 145](#_Toc165483390)

# BAB 1 DETERMINAN TIGA BAGIAN

## **Determinan Cramer**

|  |
| --- |
| Saat A, B, dan C menjadi matriks-matriks persegi dengan ukuran yang sama. Matriks-matriks ini hanya berbeda dalam satu baris, misalkan baris ke-r. Anggaplah bahwa baris ke-r dari C dapat diperoleh dengan menambahkan entri-entri yang sesuai dalam baris-baris ke-r dari A dan B.  Maka determinan dari C sama dengan determinan dari A ditambah dengan determinan dari B. Hasil yang sama juga berlaku untuk kolom. |

|  |
| --- |
| Jika B adalah matriks n × n dan E adalah matriks elemen n × n, maka determinan dari hasil perkalian E dan B sama dengan perkalian determinan dari E dan B secara terpisah. Dengan kata lain: . |

|  |
| --- |
| Sebuah matriks persegi A adalah dapat dikatakan invertible jika dan hanya jika determinannya. |

|  |
| --- |
| Jika matriks A dapat dibalikkan, maka: |

|  |
| --- |
| Adjoin Matriks |

|  |
| --- |
| AJika Ax = b adalah sebuah sistem persamaan linear dengan n variabel yang dinyatakan dalam matriks A dan maka sistem tersebut memiliki solusi tunggal.  z  Di mana Aj adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri-entri dalam kolom ke-j dari matriks A dengan entri-entri dalam matriks B. |

### **Soal dan Pembahasan**

1. Diketahui persaman A:

Tentukan nilai variabel dari SPL 3 variabel diatas dengan menggunakan metode cramer !

**Penyelesaian:**

**Tahap Pertama**: mengubah persamaan linear diatas kedalam sebuah matriks

**Tahap Kedua**: Mencari determinan dari matriks A

**Tahap Ketiga**: Mencari nilai dari variabel x

**Tahap Ketempat**: Mencari nilai dari variabel y

**Tahap Kelima**: Mencari nilai dari variabel y

Maka dengan ini sudah dapat kita ketahui bawa nilai dari variabel

1. Diketahui persaman **A**:

Tentukan nilai variabel dari SPL 3 variabel diatas dengan menggunakan metode cramer !

**Penyelesaian:**

**Tahap Pertama**: mengubah persamaan linear diatas kedalam sebuah matriks

101

**Tahap Kedua:** Mencari determinan dari matriks A

**Tahap Ketiga:** Mencari nilai dari variabel x

**Tahap Ketempat:** Mencari nilai dari variabel y

**Tahap Kelima:** Mencari nilai dari variabel y

204

62

1. Selesaikan SPLTV berikut dengan menggunakan aturan Cramer.

**Penyelesaian:**  
Rumus Cramer:

Bentuk matriks dari SPLTV di atas adalah sebagai berikut.

* Menentukan nilai Determinan matriks koefisien A, Ax, Ay, dan Az sebagai berikut.

30

10

60

* Masukkan hasil determinan A, Ax, Ay, dan Az kedalam rumus cramer:

1. Selesaikanlah persamaan dibawah ini dengan menggunakan metode cramer

**Penyelesaian:**Rumus Cramer:

Bentuk matrik dari SPLDV di atas sebagai berikut

* Menentukan nilai Determian matriks Koefisien D, Da, dan Db

* Masukkan Nilai Determian D, Da, dan Db kedalam rumus Cramer

1. Selesaikan SPLDV berikut dengan menggunakan aturan Cramer.

**Penyelesaian:**

Bentuk matriks di atas adalah

Determinan matriks koefisien nya beserta Dx dan Dy  dinyatakan sebagai berikut

= 1(-5) – (-1)(3) = -5 + 3 = -2

= 5(-5) – 5(-1) = -25 + 5 = -20

= 1(5) – 3(5) = 5 – 15 = -10

Maka, hasil yang diperoleh dengan aturan Cramer adalah

|  |
| --- |
| x = = 10  y = = 5 |

1. Selesaikan sistem persamaan di bawah ini dengan menggunakan aturan Cramer.

**Penyelesaian::**

Bentuk matriks diatas adalah sebagai berikut:

Determinan matriks koefisien nya beserta Dx dan Dy  dinyatakan sebagai berikut:

= 4(2 - 10) – 5(22 - 2) + 0 = -132

= 2(2 - 10) – 5(6 - 2) + 0 = -36

= 4(6 - 2) – 2(22 - 2) + 0 = -24

= 4(1 - 15) – 5(11 - 3) + 2(55 - 1) = 12

Maka, hasil yang diperoleh dengan aturan Cramer adalah

|  |
| --- |
| x = = ; y = = ; z = = - |

1. Diberikan sistem persamaan linear sebagai berikut:

Tentukanlah nilai dari x, y dan z yang memenuhi persamaan tersebut dengan menggunakan metode cramer

**Penyelesaian:**

* **Langkah 1**: Ubah matriks menjadi bentuk Ax = b
* **Langkah 2**: Hitung determinannya (menggunakan metode sarrus)

Det A = ((-2). 2 .4 + (-4)(-1).3 + 2. 2 .1) – (3.2.2 + 1. (-1) . (-2) + 4 . 2 . (-4))

= ( -16 + 12 + 4) – (12+ 2 – 32)

= 0 – (-18)

= 0 + 18

= 18

* **Langkah 3:** Hitung determinan variabel x, dimana nilai dari x diganti dengan nilai dari b

Det (X)= (6 . 2 . 4 + (-4) . (-1) . 8 + 2 . 12 . 1)

– (8 . 2 . 2 + 1 . (-1) . 6 + 4 . 12 . (-4))

* **Langkah 4:** Hitung determinan variabel y, dimana nilai dari y diganti dengan nilai dari b

Det Y = ((-2) . 12 . 4 + 6 . (-1) . 3 + 2 . 2 . 8)

– (3 . 12 . 2 + 8 . (-1) . (-2) + 4 . 2 . 6)

= (- 96 - 18 + 32) – (72 + 16 + 48)

= - 82 - 136

= - 218

* **Langkah 5:** Hitung determinan variabel z, dimana nilai dari z diganti dengan nilai dari b

Det Z = ((-2) . 2 . 8 + (-4) . 12 . 3 + 6 . 2 . 1)

– (3 . 2 . 6 + 1 . 12 . (-2) + 8 . 2 . (-4))

= ( -32 – 144 + 12) – (36 – 24 – 64)

= (-164) – (-52)

= (-164) + 52

= - 112

* **Langkah 6:** Hitunglah solusi dari persamaan tersebut dengan aturan cramer

X = = = 15

Y = = =

Z = = =

* **Langkah 7:** Buat kesimpulan

Sehingga dapat disimpulkan bahwa nilai dari x = 15; y = - dan z = -56/9.

1. Diberikan sistem persamaan linear sebagai berikut:

Tentukanlah nilai dari x, y dan z yang memenuhi persamaan tersebut dengan menggunakan metode cramer dan tentukan nilai dari 3x + 4y + z.

**Penyelesaian:**

* **Langkah 1:** Ubah matriks menjadi bentuk Ax = b
* **Langkah 2:** Hitung determinannya (menggunakan metode sarrus)

Det A = (2 (-1) (-5) )+ (-4) . 2 . 1 + 3 . 3 . 2)

– (1 . (-1) . 3 + 2 . 2 . 2 + (-5) . 3 . (-4)

= (10 - 8 + 18) – ( -3 + 8 + 60)

= 20 – 65

= - 45

* **Langkah 3:** Hitung determinan x, dimana nilai dari x diganti dengan nilai dari b

Det X = ((-19) (-1) (-5) + (-4) . 2 . 18 + 3 . (-11) . 2)

– (18 . (-1) . 3 + 2 . 2 . (-19) + (-5) (-11) (-4))

= (- 95 – 144 - 66) – (- 54 – 76 – 220)

= (- 305) – (- 350)

= (- 305) + 350 => 45

* **Langkah 4:** Hitung determinan y, dimana nilai dari y diganti dengan nilai dari b

Det Y = (2 . (-11) . (-5) + (-19) . 2 . 1 + 3 . 3 . 18) –

(1 . (-11) . 3 + 18 . 2 . 2 + (-5) . 3 . (-19)

= (110 - 38 + 162) – ( -33 + 72 + 285)

= 234 – 324

= - 90

* **Langkah 5:** Hitung determinan z, dimana nilai dari z diganti dengan nilai dari b

Det Z = (2.(-1).18 )+ ((-4).(-11).1 )+ ((-19).3.2))

– ((1 . (-1).(-19)) + (2.(-11) . 2) + (18 . 3.(-4))

= (- 36 + 44 - 114) – (19 - 44 - 216)

= (-106) – (- 241)

= 135

* **Langkah 6:** Hitunglah solusi dari persamaan tersebut dengan aturan cramer

X = = = -1

Y = = = 2

Z = = = -3

* **Langkah 7:** Buat kesimpulan

Sehingga dapat disimpulkan bahwa nilai dari x = -1; y = 2 dan z = -3

1. Selesaikan persamaan berikut dengan aturan Crammer

**Penyelesaian:**

**Langkah 1:** Persamaan diatas dapat dinyatakan dengan bentuk matriks Ax = b

**Langkah 2:** Terlebih dahulu mencari determinan dari matriks koefisien untuk memastikan apakah aturan crammer dapat diterapkan atau tidak. Matriks koefisian dari persamaan diatas yaitu:

**Langkah 3:** Kemudian, dengan penggunaan metode kofaktor, diperoleh determinannya yaitu:

D = 1 {(2 x 2) – (1 x (-1))} + 1 {(-2 x 2) – (3 x (-1))} + 3 {(-2 x 1) – (3 x 2)}

D = 1 {4 – (-1)} + 1 {-4 – (-3)} + 3 {-2 - 6}

D = 1(5) + 1 (-1) + 3 (-8)

D = 5 – 1 + (-24) = - 28

**Langkah 4:** Karena D ≠ 0, maka aturan crammer dapat diterapkan, dan selanjutna dilakukan pencarian terhadap determinan lainnya yaitu

**Langkah 5:** Kemudian kita mencari hasil determinan dari

= 1 {(1 x 2) – (2 x (-1))} + 2 {(-2 x 2) – (3 x (-1))} + 3 {(-2 x 2) – (3 x 1)}

= 1 {2 - (-2)} + 2 {-4 – (-3)} + 3 {-4 -3}

= 1 (4) + 2 (-1) + 3 (-7)

= 4 – 2 – 21

= -19

**Langkah 6:** Kemudian kita mencari hasil determinan dari

= 1 {(2 x 2) – (1 x 1)} + 1 {(-2 x 2) – (3 x 1)} - 2 {(-2 x 1) – (3 x 2)}

= 1 {4 –1} + 1 {-4 – 3} + 3 {- 2 - 6}

= 1 (3) + 1 (-7) + 3 (-8)

= 3 – 7 – 24

= -20

**Hasil:** Dengan demikian, berdasarkan aturan crammer diperoleh hasil dari x, y dan z adalah sebagai berikut.

x = = =

y = = =

z = = =

1. Diperoleh persamaan:

Tentukan nilai dari y, dengan menggunakan aturan crammer

**Penyelesaian:**

**Langkah 1:** Persamaan diatas dapat dinyatakan dengan bentuk matriks Ax = b

**Langkah 2:** Kemudian, mencari determinan dari matriks koefisien untuk memastikan apakah aturan crammer dapat diterapkan atau tidak. Dengan penggunaan metode kofaktor, diperoleh determinannya yaitu:

D = 1 {(0 x 1) – (3 x (-2))} + 1 {(1 x 1) – (3 x 1)} + 1 {(1 x (-2)) – (1 x 0)}

D = 1 {0 – (-6)} + 1 {1 – 3)} + 1 {-2 - 0}

D = 1 (6) + 1 (-2) + 1 (-2)

D = 6 – 2 – 2

D = 2

**Langkah 3:** Karena D ≠ 0, maka aturan crammer dapat diterapkan, dan selanjutna dilakukan pencarian terhadap determinan dari sebelum mencari nilai dari y.

= 1 {(11 x 1) – (0 x 3)} - 6 {(1 x 1) – (1 x 3)} + 1 {(1 x 1) – (1 x 3)}

= 1 {11 - 0)} - 6 {1 – 3} + 1 {1 - 3}

= 1 (11) - 6 (-2) + 1 (-2)

= 11 + 12 – 2

= 21

**Hasil:** Maka, nilai dari y adalah

y = =

1. Selesaikanlah sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) berikut dengan menggunakan Aturan Cramer.

2x – 30y + z = 2

-3x – 2y – 2z = 2

4x – y + z = 2

**Penyelesaian:**

=

Cari determinan dari matriks koefisien

Dengan menggunakan [metode ekspansi kofaktor](https://jagostat.com/aljabar-linear/menghitung-determinan-matriks-menggunakan-metode-ekspansi-kofaktor), di peroleh determinannya yaitu

D = = 2 – (–30) + 1

D = 2 (−2−2) − (−30) (−3−(−8)) + 1 (3−(−8))

D = 2 (−4) + 30 (5) + 1 (11)

D = −8 + 150 + 11

D = 153

Karena D≠0, maka Aturan Cramer dapat diterapkan. Selanjutnya, cari determinan-determinan

Dx = = Dx =

Dx = 2( 2) (30) ( ()) + 1(2 ()

Dx = 2() + 30(6) + 1(2)

Dx = + 180 + 2

Dx = 174

Dy = = Dy =

Dy = 2( (4) 2( (8) + 1(6 8)

Dy = 2() 2(5) + 1(14)

Dy = 10 14

Dy =

Dz = = Dz =

Dz = 2( (2)) ( 30) ( 8) + 2( 8))

Dz = 2() 30() + 2(11)

Dz = 420 22

Dz =

Penyelesaian SPLTV

x = = =

y = = =

z = = =

1. Selesaikanlah sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) berikut dengan menggunakan Aturan Cramer.

5x – 12y + 2z = 60

-2x – 9y – 3z = 18

3x – 2y + 5z = 30

**Penyelesaian:**

Persamaan diatas dapat dinyatakan dengan bentuk matriks Ax = b

=

Cari determinan dari matriks koefisien

Dengan menggunakan [metode ekspansi kofaktor](https://jagostat.com/aljabar-linear/menghitung-determinan-matriks-menggunakan-metode-ekspansi-kofaktor), kita peroleh determinannya yaitu

D = = 5 – (–12) + 2

D = 5 (−45−6) − (−12) (−10−(−9) + 2 (4−(−27))

D = 5 (−51) + 12 (−1) + 2 (41)

D = −255 − 12 + 82

D = −185

Karena D≠0, maka Aturan Cramer dapat diterapkan. Selanjutnya, cari determinan-determinan

Dx = = Dx =

Dx = 60( 6) (12) ( ()) + 2(36 ()

Dx = 60() + 12(180) + 2(234)

Dx = + 2160 + 468

Dx = 432

Dy = = Dy =

Dy = 5( (90) 60( (9)) + 2(60 54)

Dy = 5() 60() + 2(114)

Dy = 60 228

Dy =

Dz = = Dz =

Dz = 5( (36)) (12) ( 54) + 60( 27))

Dz = 5() 12() + 60(31)

Dz = 1368 1860

Dz =

Penyelesaian SPLTV

x = =

y = =

z = =

1. Perhatikan persamaan berikut:

Tentukan persamaan di atas dengan menggunakan Cramer’s rule!

**Penyelesaian:**

1. **Det (A):**

Det(A) = 1 ((3 x 5) - (9 x 6)) – 4 ((-7 x 5) – (5 x 6)) + 7((-7 x 9) – (5 x 3))

= 1(-39) – 4(-65) + 7(-78)

= -39 + 260 + (-546)

= -325

1. **Det ():**

Det () = 12((3 x 5) – (9 x 6)) – 4((21 x 5) – (6 x 8)) + 7((21 x 9) – (8 x 3))

= 12(-39) – 9(57) + 7(81)

= -468 – 513 + 567

= -414

1. **Det () :**

Det () = 1((21 x 5) – (8 x 5)) – 12((-7 x 5) – (5 x 6)) + 7((-7 x 8) – (21 x 5))

= 1(65) – 12(-65) + 7(-161)

= 65 + 780 + (-1127)

= -282

1. **Det (:**

Det ()= 1((3 x 8) – (9 x 21)) – 4((-7 x 8) – (5 x 21)) + 12 ((-7 x 9) – (3 x 5))

= 1(-157) – 4(-161) + 12(-78)

= -57 + 644 + (-936)

= -349

Maka:

=

=

=

1. Diketahui sistem persamaan linear berikut:

Gunakan persamaaan di atas dengan menggunakan metode Cramer’s rule untuk menentukan nilai x dan y

**Penyelesaian:**

= (2 x 8) – (3 x 6)

= 12 – 18

= -6

= (12 x 8) – (9 x 6)

= 96 – 54

= 42

= (2 x 9) – (3 x 12)

= 18 – 36

= -18

Maka:

= = -7

= = -3

Jadi nilai x dan y yang memenuhi persamaan di atas yaitu = -7 dan y = -3

1. Selesaikan sistem persamaan linier dengan aturan Cramer

x1 –2x2 + 3x3 = 2

2x1 +x2  = 4

3x1 +x2 – x3 = 0

**Penyelesaian:**

Terlebih dahulu ubah persamaan diatas menjadi matriks.

=

Langkah selanjutnya adalah mencari determinan dari matriks diatas.

Persamaan diatas adalah persamaan linier 3 variabel, maka

Rumus: **Det (A) = a11M11 + a12(-M12)+ a13M13**

Det A =

Det A =

Det A = 1 **(**1.(-1) – 0.1**)** – (-2)**(**2.(-1) – 0.3**)** + 3(2.1 – 1.3)

Det A = 1(-1-0) – (2) (-2-0) + 3(2-3)

Det A = -1 – 4 + (-3)

Det A = -8

Langkah berikutnya adalah mencari determinan dari A1, A2 dan A3

* **Det (A1)**

Tukar nilai dari kolom pertama menjadi nilai hasil persamaan, maka diperoleh:

Det A1 = – (-2) + 3

Det A1 = 2**(**1.(-1) – 0.1**)** – (-2)**(**4.(-1) – (0.0)**)** + 3(4.1 – 1.0)

Det A1 = 2(-1-0) – (-2) (-4) + 3(4-0)

Det A1 = -2 – 4 +12

Det A1 = 6

* **Det A2**

Tukar nilai dari kolom kedua menjadi nilai hasil persamaan, maka diperoleh:

Det A2 =

Det A2 = 1 – 2 + 3

Det A2 = 1(4.(-1) – 0.0) – 2(2.(-1) – 0.3) + 3(2.0 – 4.3)

Det A2 = 1(-4 – 0) – 2(-2 – 0) + 3(0 – 12)

Det A2 = - 4 + 2 – 36

Det A2 = - 38

* **Det A3**

Tukar nilai dari kolom ketiga menjadi nilai hasil persamaan, maka diperoleh:

Det A3 =

Det A3 =

Det A3 = 1(1.0 – 4.1) – (-2) (2.0 – 4.3) + 2(2.1 – 1.3)

Det A3 = 1(0-4) – (-2) (0-12) + 2(2-3)

Det A3 = -4 – 24 + (-2)

Det A3 = - 30

Jadi dari langkah-langkah penyelesaian diatas didapat nilai x1, x2, dan x3 yaitu:

1. Selesaikan sistem persamaan linier berikut dengan aturan Cramer

3x + 4y = 10

x – 11y = 2

**Penyelesaian:**

Terlebih dahulu ubah persamaan diatas menjadi matriks.

=

Langkah selanjutnya adalah mencari determinan dari matriks diatas.

Persamaan diatas adalah persamaan linier 2 variabel, maka :

Rumus**: Det (B) = ad - bc**

**Det B** =

= 3.(-11) – 4.1

= -33 – 4

= -37

Langkah berikutnya adalah mencari determinan dari B1, B2

* **Det B1**

Tukar nilai dari kolom pertama menjadi nilai hasil persamaan, maka diperoleh:

Det B1 =

Det B1 = 10 (-11) – 4.2

Det B1 = -110 – 8

Det B1 = -118

* **Det B2**

Tukar nilai dari kolom kedua menjadi nilai hasil persamaan, maka diperoleh:

Det B2 =

Det B2 = 3.2 – 10.1

Det B2 = 6 – 10

Det B2 = - 4

Jadi dari langkah-langkah penyelesaian diatas didapat nilai x dan y yaitu:

1. Tentukan nilai , dan dari persamaan dibawah dengan menggunakan metode Cramer

**Penyelesaian:**

Persamaan dalam soal diatas dapat dinyatakan dengan bentuk matriks Ax = b

A =

Det (A) = (1.4.3 + 0.6.(-1) + 2.(-3).(-2)) – (2.4.1 + 1.6.(-2) + 0.3.(-3))

= (12 + 0 + 12) - (8 + (-12) + 0)

= 24 – (-4)

= 28

=

Det ( = (6.4.3 + 0.6.8 + 2.30.(-2)) – (2.4.8 + 6.6.(-2) + 0.30.3)

= (72 + 0 + (-120) – (64 + (-72) + 0)

= -48 – (-8)

= -40

=

Det () = (1.30.3 + 6.6.(-1) + 2.(-3).8) – (2.30.(-1) + 1.6.8 + 6.(-3).3)

= (90 + (-36) + (-48)) – (-60 + 48 + (-54)

= 6 – (-66)

= 72

Det ( (1.4.8 + 0.30.(-1) + 6.(-3).(-3)) – (6.4.1 + 1.30.(-2) + 0.(-3).8)

= (32 + 0 + 54) – (24 + (-60) + 0)

= 86 – (-36)

= 122

Maka:

= =

= =

= =

1. Selesaikanlah sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) berikut dengan menggunakan Aturan Cramer.

-x – 3y + 2z = 4

-2x – y – z = 3

-x – 5y + 5z = 7

**Penyelesaian:**

=

Cari determinan dari matriks koefisien

Dengan menggunakan [metode ekspansi kofaktor](https://jagostat.com/aljabar-linear/menghitung-determinan-matriks-menggunakan-metode-ekspansi-kofaktor), kita peroleh determinan D yaitu

D = = 1 – (–3) + 2

D = ⋅(-5−5) − (-3)⋅(-10−1) + 2⋅(10−1)

D = ⋅(-10) + 3⋅(-11) + 2⋅(9)

D = 10 − 33 + 18

D = -5

Karena D≠0, maka Aturan Cramer dapat diterapkan. Selanjutnya, cari determinan-determinan

**Dx** = = Dx =

Dx = 4( 5) () ( ()) + 2(15 ()

Dx = 4() + 3(22) + 2(8)

Dx = + 66 16

Dx = 10

**Dy** = = Dy =

Dy = 1( (7) 4( 1) + 2(14) ()

Dy = 1() 4() + 2(11)

Dy = 44 22

Dy =

**Dz** = = Dz =

Dz = 1( (15)) () ( () + 4( )

Dz = 1() 3() + 4(9)

Dz = 33 36

Dz =

Penyelesaian SPLTV

x = = = -2

y = = = 0

z = = = 1

1. Selesaikan sistem persamaan dua variable (SPLDV) berikut dengan menggunakan aturan crammer.

2x – 3y = -13

2x + 2y = 4

**Penyelesaian:**

* Persamaan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, yaitu

=

* Kemudian mencari determinan nya, sebagai berikut.

D =

D = 2(2) – (-3)(2)

D = 4 – (-6)

D = 10

* Kemudian kita mencari nilai dan

=

= -13(2) – 4(-3)

= -26 – (-12)

= -14

=

= 2(4) – (-13)(2)

= 6 – (-26)

= -20

Berdasarkan aturan crammer, diperoleh hasil berikut

x = = =

y = = = -2

Jadi, nilai dari x = dan y = -2.

1. Selesaikan sistem persamaan linear tiga variabel berikut dengan menggunakan Aturan Cramer.

3x + 2y - z = 6

x - 3y + 2z = 5

2x + y + 4z = 3

**Penyelesaian:**

Det (D) = (3 × (-3) × 4) + (2 × 2 × 2) + ((-1) × 1 × 2) − ((-1) × (-3) ×2) − ( 2 × 1 × 4 ) − (3 × 2 × (-1))

Det (D) = (-36) + 8 – 2 + 6 – 8 + 6

Det (D) = -36 + 8 – 2 + 6 – 8 + 6

Det (D) = -26

Dx ​= (6 × (-3) × 4) + (2 × 2 × 3) + ((-1) × 5 × 3) − ((-1) × (-3) × 3) − (2 × 1 × 4) − (6 × 2 × (-1))

Dx ​= (-72) + 12 – 15 + 9 – 8 + 12

Dx ​=-72+12−15 + 9 – 8 + 12

Dx ​=-62

Dy ​= (3 × 5 × 4) + (6 × 2 × 2) + ((-1) × 1 × 3)

− ((-1) × 5 × 2) − (6 × 3 × 4) − (3 × 2 × 4)

Dy​ = (60) + (24) − (3) − (10) − (72) − (24)

Dy​ = 60 + 24 – 3 – 10 – 72 – 24   
Dy ​=-25

Dz​= (3 × (-3) × 3) + (2 × 5 × 2) + (6 × 1 × 1)

− (6× (-3) ×2) − (2 × 1 × 3) − (3 × 5 × 1)

Dz​= (-27) + 20 + 6 + 36 – 6 – 15

Dz​= -27 + 20 + 6 + 36 – 6 – 15

Dz​= 4

menghitung nilai x, y, dan z:

x = = =

y = = =

z = = =

1. Selesaikan sistem persamaan linear tiga variabel berikut dengan menggunakan Aturan Cramer.

2x + y + z = 4

3x - 2y + 2z = 1

x + 3y - z = 5

**Penyelesain:**

D = (2 × (-2) × (-1)) + (1 × 2 × 1) + (1 × 3 × 3)

− (1 × (-2) × 1) − (2 × 3 × 1) − (1 × 1 × 3)

D = (-4) + 2 + 9 + 2 – 6 – 3

D = 0

Dx​ = (4 × (-2) × (-1)) + (1 × 2 × 5) + (1 × 3 × 3)

− (1 × (-2) × 5) − (2 × 3 × 4) − (1 × 1 × (-1))

Dx​ = 8 + 10 + 9 + 10 – 24 + 1

Dx​ = 14

Dy​ = (2 × 1 × (-1)) + (4 × 2 × 1) + (1 × 3 × 5)

− (1 × 1 × 5) − (2 × 3 × 1) − (4 × 5 × (-1))

Dy ​= -2 + 8 + 15 – 5 – 6 + 20

Dy​ = 30

Dz​= (2 × (-2) × 5) + (1 × 1 × 1) + (4 × 3 × 1)

− (4 × (-2) × 1) − (1 × 3 × 2) − (2 × 1 × 5)

Dz​= -20 + 1 + 12 + 8 – 6 – 10

Dz​= -15

menghitung nilai x, y, dan z:

x = =

y = =

z = =

Hal ini menunjukkan bahwa SPLTV tersebut memiliki solusi yang tidak terhingga atau tidak konsisten karena determinan utama D sama dengan 0.

1. Selesaikan sistem persamaan linear tiga variabel berikut dengan menggunakan Aturan Cramer.

3x + y - z = 8

2x - 2y + 3z = 1

x + 4y + 2z = 7

**Penyelesaian:**

D= (3 × (-2) × 2) + (1 × 3 × 1) + (-1 × 2 × 4)

− (-1 × (-2) × 1) − (3 × 4 × 1) − (2 × 1 × 4)

D= (-12) + 3 – 8 – 2 – 12 – 8

D=-39

Dx​= (8 × (-2) × 2) + (1 × 3 × 7) + (-1 × 1 × 4)

− (-1 × (-2) × 7) − (3 × 4 × 8) − (2 × 1 × 1)

Dx​= -32 + 21 – 4 + 14 – 96 – 2

Dx​= -99

Dy​= (3 × 1 × 2) + (8 × 3 × 1) + (-1 × 2 × 7)

− (-1 × 1 × 3) − (2 × 8 × 2) − (3 × 7 × 1)

Dy​= 6 + 24 – 14 + 3 – 32 – 21

Dy​= -54

Dz ​= (3 × (-2) × 7) + (1 × 1 × 1) + (8 × 4 × 1)

− (8 × (-2) × 1) − (1 × 4 × 3) − (2 × 1 × 7)

Dz ​= -42 + 1 + 32 + 16 – 12 – 14

Dz​ = -19

menghitung nilai x, y, dan z:

x = = = 3

y = = =

z = = =

1. Diketahui matriks A :

Tentukan Solusi dari system persamaan variabel diatas dengan menggunakan metode cramer !

**Penyelesaian**

Mencari determinan dari matriks A

Det (A) =

= 2((-2) x 1) - (1 x 2)) – 3((1 x 1) – (3 x 2)) - 1 ((1 x 1) – (3 x -2))

=2(-2 – 2) – 3(1 – 6 ) – 1 (1 + 6)

= 2 ( -4 ) - 3 ( -5) -1( 7)

= -8 + 15 -7

= 0

Dari sini, dapat dilihat bahwa determinan dari matriks koefisien A adalah nol. Sehingga, metode Cramer tidak dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan ini karena tidak ada solusi unik.

1. Selesaikan sistem persamaan linier berikut dengan aturan Cramer

**Penyelesaian:**

Terlebih dahulu ubah persamaan diatas menjadi matriks.

=

Langkah selanjutnya adalah mencari determinan dari matriks diatas.

Persamaan diatas adalah persamaan linier 2 variabel, maka:

Rumus**: Det (B) = ad – bc**

det B =

= 2.1 – (- 4).3

= 2 – (-12)

= 14

Langkah berikutnya adalah mencari determinan dari B1, B2

* **Det B1**

Tukar nilai dari kolom pertama menjadi nilai hasil persamaan, maka diperoleh:

Det B1 =

Det B1 = (-5).1 – (-4).1

Det B1 = -5 – (-4)

Det B1 = -5 + 4

Det B1 = -1

* **Det B2**

Tukar nilai dari kolom kedua menjadi nilai hasil persamaan, maka diperoleh:

Det B2 =

Det B2 = 2. – (-5).3

Det B2 = 2 – (-15)

Det B2 = 2 + 15

det B2 = 17

Jadi dari langkah-langkah penyelesaian diatas didapat nilai x dan y yaitu:

x = =

y =

1. Diberikan sistem persamaan linear sebagai berikut:

Tentukanlah nilai dari x, y dan z yang memenuhi persamaan tersebut dengan menggunakan metode cramer.

**Penyelesaian:**

* Langkah 1: Ubah matriks menjadi bentuk Ax = b
* Langkah 2: Hitung determinannya (menggunakan metode sarrus)

Det A = (3 . 2 . (-2) + (-1) . 3 . 1 + (-1) . 2 . 1)

– (1 . 2. (-1) + 1 . 3 . 3 + (-2) . 2 . (-1)

= (- 12 – 3 - 2) – ( - 2 + 9 + 4)

= – 17 - 11

= - 28

* Langkah 3: Hitung determinan untuk x, dimana nilai dari x diganti dengan nilai dari b

Det X = (6 . 2 . (-2) + (-1) . 3 . (-9) + (-1) . 7 . 1)

– ((-9) . 2. (-1) + 1 . 3 . 6 + (-2) . 7 . (-1)

= (- 24 + 27 - 7) – (18 + 18 + 14)

= -4 – 50

= -54

* Langkah 4 : Hitung determinan untuk y, dimana nilai dari y diganti dengan nilai dari b

Det Y = (3 . 7 . (-2) + 6 . 3 . 1 + (-1) . 2 . (-9))

– (1 . 7 . (-1) + (-9) . 3 . 3 + (-2) . 2 . 6)

= (- 42 + 18 + 18) – ( - 7 - 81 - 24)

= -6 – (-112)

= -6 + 112

= 106

* Langkah 5: Hitung determinan untuk z, dimana nilai dari z diganti dengan nilai dari b

Det Z = (3 . 2 . (-9) + (-1) . 7 . 1 + 6 . 2 . 1)

– (1 . 2. 6 + 1 . 7 . 3 + (-9) . 2 . (-1)

= (- 54 - 7 + 12) – ( 12 + 21 + 18)

= (- 49) – 51

= - 100

* Langkah 6: Hitunglah solusi dari persamaan tersebut dengan aturan cramer

X = = =

Y = = =

Z = = =

* Langkah 7: Buat kesimpulan

Sehingga dapat disimpulkan bahwa nilai dari

x = 27/14 ; y = -53/14 ; z = 50/14

## **Determinan Reduksi Baris**

|  |
| --- |
| Jika A adalah matriks persegi dan memiliki setidaknya satu baris atau kolom yang seluruhnya terdiri dari nol, maka determinan dari A akan menjadi nol. |

|  |
| --- |
| Jika A adalah matriks persegi. Maka determinan dari A sama dengan determinan dari transposenya, det(A) = det(AT). |

|  |
| --- |
| (a) Jika B adalah matriks yang dihasilkan ketika satu baris atau satu kolom dari A dikalikan dengan sebuah skalar k, maka determinan dari B adalah k kali determinan dari A.  (b) Jika B adalah matriks yang dihasilkan ketika dua baris atau dua kolom dari A ditukar, maka determinan dari B adalah negatif dari determinan A.  (c) Jika B adalah matriks yang dihasilkan ketika suatu kelipatan dari satu baris A ditambahkan ke baris lainnya atau ketika suatu kelipatan dari satu kolom A ditambahkan ke kolom lainnya, maka determinan dari B adalah sama dengan determinan dari A. |

|  |
| --- |
| (a) Jika E adalah matriks elemen yang dihasilkan dari perkalian sebuah baris dari matriks identitas In dengan suatu bilangan bukan nol k, maka determinan dari E adalah k.  (b) Jika E adalah matriks elemen yang dihasilkan dari pertukaran dua baris dari matriks identitas In, maka determinan dari E adalah -1.  (c) Jika E adalah matriks elemen yang dihasilkan dari penambahan suatu kelipatan dari satu baris dari matriks identitas In ke baris lainnya, maka determinan dari E adalah 1. |

### **Soal Dan Pembahasan**

1. Hitunglah det (A) dimana A = menggunakan metode reduksi baris

**Penyelesaian:**  
Det(A) =

= -1/3B1 + B3

= - -3B3

= -

Jadi, det(A) =- (3)(3) = 20

1. Hitunglah Determinan(A) menggunakan operasi reduksi baris dimana

A =

**Penyelesaian:**

Det(A) =

=

=

=

=

=

=

Jadi, Det (A) = -(-1) (1.1.1.6) = 6

1. Hitunglah det (A) dimana A = dengan menggunakan metode reduksi baris

**Penyelesaian:**  
det(A)

B2 ganti bertukar posisi dengan B1

=

=

Jadi, det(A) = -(3) (-55) = 165

1. Diberikan matriks 3x3 berikut:

A =

Hitung determinan matriks A menggunakan metode reduksi baris.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkah untuk menghitung determinan dengan metode reduksi baris pada matriks 3x3 adalah sebagai berikut:

1. Mulai dengan matriks awal A:

​​ A =

1. Gunakan operasi baris untuk membuat diagonal utama menjadi 0:

A =

Kalikan baris pertama dengan ½ ​ dan kurangkan dari baris kedua.

A =

Kalikan baris pertama dengan 3/2 ​ dan kurangkan dari baris ketiga.

A =

Kalikan baris kedua dengan 2/5​ dan tambahkan pada baris ketiga.

Hasil setelah reduksi

A =

1. Hitung determinan matriks hasil reduksi baris:

Det(A)=2⋅2/5​⋅5 = 25

Jadi, determinan matriks A dengan metode reduksi baris yang benar adalah 25.

1. Diberikan matriks 4x4 berikut:

A=

Hitung determinan matriks A menggunakan metode reduksi baris.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkah untuk menghitung determinan dengan metode reduksi baris pada matriks 4x4 adalah sebagai berikut:

1. Mulai dengan matriks awal A:

A =

1. Gunakan operasi baris untuk membuat diagonal utama menjadi 0:

A =

Kalikan baris pertama dengan -2 dan tambahkan pada baris kedua.

A =

Kalikan baris pertama dengan -3 dan tambahkan pada baris ketiga.

A =

Kalikan baris pertama dengan -4 dan tambahkan pada baris keempat.

A =

Kalikan baris kedua dengan -2 dan tambahkan pada baris ketiga.

A =

Kalikan baris kedua dengan -3 dan tambahkan pada baris keempat.

A =

Kalikan baris ketiga dengan -3/2​ dan tambahkan pada baris keempat.

A =

Matriks setelah operasi baris:

A =

Hitung determinan matriks hasil reduksi baris:

det(A)= 1⋅(-1)⋅1⋅0 = 0

Jadi, determinan matriks A dengan metode reduksi baris adalah 0.

1. Diketahui matrix A 3 x 3 berikut. A =

Hitunglah det(A):

**Penyelesaian:**

Det(A) = 2R1

Det(A) =

Det(A) =

Det(A) = 2.1.9 = 18

1. Diketahui Matrix 4 x 4 dibawah ini

A =

Hitunglah det(A) menggunakan reduksi baris

**Penyelesaian:**

Det(A) =

Det(A) =

Det(A) =

Det(A) = 2 . (-1/2) . 4 . (-12/20) = 2.4

1. Hitung determinan matriks berikut dengan Operasi Reduksi Baris

A=

**Penyelesaian:**

=

= è Pertukaran Baris dilakukan untuk mempermudah operasi

è -2B1 + B2

è -B2 + B3

Det A= 7 x (1) x (1) x (-1) = -7

1. Hitung determinan matriks berikut dengan Operasi Reduksi Baris

S =

**Penyelesaian:**

S = è -2B1 +B2

S = è-6B2 + B3

S =

S = è -7b1 – B4

S = è -3b2 +B4

S = è -B3 + B4

S =

S =

Det |S|= 3 x (-19) x (1) x (1) x (1) = -57

1. Mencari determinan matriks 3x3 menggunakan reduksi baris

**Penyelesaian:**

Langkah Ketiga 15b2+b3

1. Carilah Determinan dari matriks 4x4 dibawah ini menggunakan reduksi baris

**Penyelesaian:**  
 Langkah Pertama 2b1 – b2

Langkah Kedua b1 + b3

Langkah ketiga 3b1 – b4

Langkah keempat 1/2b2

Langkah kelima 3b2 – b3

Langkah keenam 6b2 – b4

Langkah ketujuh (-2)(b3)

Langkah kedelapan 2b3 – b4

Langkah kesembilan -1/36(b4)

1. Diberikan subuah matriks

A =

1. Tentukan determinan dari matriks A dengan menggunakan metode reduksi baris.
2. Berapa nilai determinan matriks A setelah reduksi baris ?

**Penyelesaian:**

1. Tentukan determinan dari matriks A dengan menggunakan metode reduksi baris.

A =

A Langkah pertama B2 = B2 -

A Langkah kedua B3 = B3 - B1

A Langkah ketiga B3 = B3 + B2

1. Berapa nilai determinan matriks A setelah reduksi baris ?

det(A) = 2 x x - = -42

Jadi, determinan matriks A setelah di reduksi baris = -42

1. Diberikan matriks sebagai berikut:

C =

1. Tentukan determinan dari matriks C dengan menggunakan metode reduksi baris.
2. Berapa nilai determinan matriks C setelah reduksi baris ?

**Penyelesaian:**

1. Tentukan determinan dari matriks C dengan menggunakan metode reduksi baris.

C =

Langkah **pertama** B3 -

C =

Langkah **kedua** B4 - B1

C

Langkah **ketiga** B3 - B2

C

Langkah **keempat** B4 - B2

C

1. Berapa nilai determinan matriks C setelah reduksi baris

det(C) = 3 x 2 x x = 99

Jadi, determinan matriks C setelah reduksi baris adalah 99.

1. Hitunglah determinan dari matriks A dedngan menggunakan reduksi baris

A =

**Penyelesaian:**

Ubah Segitiga dibawah diagonal menjadi nol dengan mengalikan baris dengan angka yang memungkinkan

Ket:

B1 = baris pertama

B2 = baris kedua

B3 = baris ketiga

A =

A = b2

A =

A =

A =

A =

A =

menghitung determinannya dengan mengalikan diagonal utamanya:

Det (A) = (1) (1) (-2) = **-2**

1. Hitunglah determinan dari matriks B dengan menggunakan metode reduksi baris

B =

**Penyelesaian:**

Ubah Segitiga dibawah diagonal menjadi nol dengan mengalikan baris dengan angka yang memungkinkan behubunagn dengan heading onenya.

Ket:

B1 = baris pertama

B2 = baris kedua

B3 = baris ketiga

B =

B =

B =

B =

B =

Jadi Det (B) = (3) (1) (1) (4/3) = 12/3 = 4

1. Sebuah matrix sebagai berikut

Berapakah determinan dengan menggunakan reduksi baris?

**Penyelesaian:**

**Langkah 1:** Tukar posisi antara baris ke-3 dan baris ke-1

**Langkah 2:** Lalu, lakukan hal yang sama antara baris ke-2 dan baris ke-3

**Langkah 3:** Setelah melakukan adjustmen, segitiga dibawah diagonal ubah menjadi nol.

**Langkah 4**: Gunakan OBE untuk mengubah segitiga dibawah diagonal pada matriks C

untuk baris ke-2: 2(b1) – (b2)

untuk baris ke-3: 3(b1) – (b3)

untuk baris ke-3: 3(b1) – (b3)

untuk baris ke-3: 2(b2) + (b3)

Setelah mengubah nilai-nilai dibawah diagonal menjadi nol, maka untuk mencari nilai determinannya ialah:

Det (A) = [(1)(1)(34)](-1)(-1)

* Perkalikan nilai diagonal dari matriks produk
* Kalikan -1 untuk setiap pertukaran terjadi
* Kalikan nilai yang digunakan untuk membagi apabila terjadi pembagian

Dari hasil tersebut, dapat disimpulkan hasil atau nilai diaonal dari matriks tersebut ialah

**Det(A) = 34**

1. Sebuah matrix Z sebagai berikut

Berapakah determinan dengan menggunakan reduksi baris?

**Penyelesaian:**

(b3) = (b3)/2

(b2) = (b2)-2(b1)

(b3) = (b3) \* (-1)

(b3) = 3(b1)-b (3)

(b3) = 3(b3)-5(b2)

Dari perhitungan ini, maka cari determinan dengan, mengalikan setiap angka diagonal dan menambahkan

* Perkalikan nilai diagonal dari matriks produk
* Kalikan -1 untuk setiap pertukaran terjadi
* Kalikan nilai yang digunakan untuk membagi apabila terjadi pembagian

Maka, determinannya ialah:

Det(A) = [(1)(3)(14)] (-1)

Det(A) = [42] (-1) = -42

1. Diketahui matriks berikut :

Hitunglah determinan dari matriks A menggunakan metode reduksi baris dengan operasi baris elementer (OBE)

**Penyelesaian:**

* Pertukaran Baris Baris 1 ditukar dengan baris 2

R1 <-> R2 (Ganti posisi Baris 1 dan 2 )

* Reduksi Baris R3- ⅔ R1

R3 – 2/3(R1)

* Reduksi Baris Lanjutan R3-10R2

R3 – 10.R2

Matriks Segitiga atas

Ada satu operasi pertukaran baris, maka p = 1

Sehingga det(A) = (-1)1 (3) (1) (-55) = 165

Jadi, hasil determinan dari matriks A adalah 165.

1. Coba Hitung Determinan Matriks A Dibawah ini dengan menggunakan Reduksi Baris

A =

**Penyelesaian:**

**Langkah 1:** Pertukaran Baris

A =

R1 <-> R3 (Ganti posisi baris 1 dan 3)

**Langkah 2:** Gunakan OBE berikut untuk mengganti nilai matriks

A =

**Langkah 3:** Gunakan OBE berikut untuk mengganti nilai matriks

**Langkah 4:** Gunakan OBE berikut untuk mengganti nilai matriks

Ada satu operasi pertukaran baris, maka p = 1

sehingga Det(A) = (-1)1(1)(3)(6)(7/6) = -21

Jadi, hasil determinan dari matriks A adalah -21.

1. Hitunglah Determinan dari matriks berikut menggunakan Reduksi Baris :

**Penyelesaian:**

**Langkah 1:** Tukar posisi antar baris

R1 <-> R3 (Ganti posisi baris 1 dan 3 )

**Langkah 2:** Dengan pertukaran baris "R1 <-> R3", matriks C diubah menjadi:

R2- 2R1

**Langkah 3:** Kemudian, dilakukan operasi "R2 - 2R1" untuk menghasilkan nol pada entri pertama dari baris kedua

R3 + 4R1

**Langkah 4:** Selanjutnya, dilakukan operasi "R3 + 4R1" untuk menghasilkan nol pada entri pertama dari baris ketiga

R3-10R2

**Langkah 5:** Terakhir, dilakukan operasi "R3 - 10R2" untuk menghasilkan nol pada entri kedua dari baris ketiga:

Matriks diatas merupakan matriks segitiga atas , karena tidak ada operasi pertukaran baris , maka   
p = 0

Det (C) = (-1)0 x 1 x (-1) x 99 = 99

1. Carilah determinan dari matrix 3x3 di bawah ini menggunakan reduksi baris

**Penyelesaian:**

Langkah pertama tukar posisi b2 dan b1

Langkah kedua b1 : 2

Langkah ketiga b2 : 2

A Langkah keempat 2b1 – b3

A Langkah kelima 10b2 + b3

A Langkah ke enam b3 : 32

1. Diberikan matriks 3 x 3

Hitung determinan dari matriks di atas menggunakan reduksi baris!

**Penyelesaian:**

Baris kedua \* Baris pertama

Baris ketiga \* Baris pertama

Baris ketiga - \* Baris kedua

Hasil setelah reduksi

Determinan dari matriks yang sudah direduksi adalah hasil kali dari elemen-elemen diagonal utamanya:

det(B)=3 . ​. (−)​=-88

Jadi, determinan dari matriks awal adalah - 88.

1. Diberikan matriks

D =

1. Tentukan determinan dari matriks D dengan menggunakan metode reduksi baris.
2. Berapa nilai determinan matriks D setelah reduksi baris ?

**Penyelesaian:**

1. Tentukan determinan dari matriks D dengan menggunakan metode reduksi baris.

D =

Langkah pertama B3

D =

Langkah kedua B4 – 2B1

D =

Langkah ketiga B3

D =

Langkah keempat B4

D =

Langkah kelima B4 + B3

D =

1. Berapa nilai determinan matriks D setelah reduksi baris ?

Jawab :

Determinan = hasil perkalian diagonal elemen utama

Det(D) = 2 x 2 x 3 x = 12

Jadi, determinan matriks D setelah reduksi baris = 12

1. Hitunglah determinan dari matriks C.

**Penyelesaian:**

1. Melakukan reduksi baris dengan Operasi Baris Elementer (OBE)
2. Menghitung determinan

Det (C) = (1) (1) (0) = 0

memiliki baris nol dalam matriks, maka determinan matriks C adalah 0

determinan dari matriks C adalah 0.

1. Hitung determinan matriks berikut dengan Operasi Reduksi Baris

**Penyelesaian:**

= è Pertukaran Baris B1 dengan B2

è 2B1 – B2

è B2 – B3

Maka:

Det (A) = -2 x (1) x (1) x (-1) = 2

1. Diketahui matrix A (3 x 3) berikut.

A =

Hitunglah Determinan dari matriks (A)

**Penyelesaian:**

Untuk mencari determinan dari matriks A, anda harus mengubah segitiga dibawah diagonal menjadi nol.

Det (A) = 2R1

Det (A) =

Det (A) =

Mencari determinan A adalah dengan mengalikan angka diagonal matriks di atas segitiga yang telah dilakukan Operasi Baris Elementer.

Maka, Det(A) = 2.1.9 = 18

## **Determinan Minor Dan Kofaktor**

|  |
| --- |
| Jika A adalah sebuah matriks persegi, maka **minor dari elemen aij** dinotasikan sebagai Mij dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihapus dari A. Angka **(-1)i + j Mij** dinotasikan sebagai Cij dan disebut sebagai **koefisien dari elemen aij**.  Dalam bahasa yang lebih sederhana:  - Minor dari suatu elemen dalam matriks adalah determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris dan kolom yang bersangkutan dihapus.  - Koefisien dari elemen tersebut adalah hasil perkalian minor dengan faktor (-1)i + j.  Dengan kata lain, untuk setiap elemen aij dalam matriks A, kita dapat menghitung minor Mij dari submatriks yang tersisa setelah menghapus baris ke-i dan kolom ke-j. Koefisien Cij adalah hasil perkalian minor tersebut dengan faktor (-1)i + j. |

|  |
| --- |
| Jika A adalah matriks berukuran n × n, maka apapun baris atau kolom yang kita pilih dari matriks tersebut, hasilnya akan selalu sama. Caranya adalah dengan mengalikan setiap elemen dalam baris atau kolom yang dipilih dengan koefisien yang sesuai, dan kemudian menjumlahkan hasilnya. |

|  |
| --- |
| Jika A adalah matriks berukuran n × n, maka hasil perkalian dari elemen-elemen dalam baris atau kolom tertentu dari A dengan koefisien yang sesuai, kemudian menjumlahkannya, disebut sebagai determinan dari A. Proses ini disebut sebagai ekspansi koefisien dari A. |

|  |
| --- |
| Jika A adalah matriks segitiga berukuran n × n (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka determinan dari A adalah hasil perkalian dari elemen-elemen pada diagonal utama matriks tersebut, yaitu det(A) = a11 \* a22 \* ... \* ann. |

### **Soal Dan Pembahasan**

* + - 1. Diberikan matriks 3x3 berikut:

1. Hitung determinan dari A
2. Hitung minor elemen A23
3. Hitung kofaktor elemen A23

**Penyelesaian:**

1. **Hitung determinan dari A**

* Kita menggunakan ekspansi kofaktor pertama untuk menghitung determinan matriks A
* Kita menghitung determinan dengan menggunakan ekspansi kofaktor pertama, yang mengasumsikan pengurangan baris pertama kali ini. Kita mengalikan setiap elemen baris pertama dengan kofaktornya dan menguranginya satu per satu:

= 2-3+1

* Kita menghitung determinan untuk setiap matriks 2x2 yang dihasilkan:

= 2((5⋅9) − (7⋅8)) − 3((4⋅9) − (7⋅6)) + 1((4⋅8) − (5⋅6))

= 2(45 - 56) – 3(36 - 42) + 1(32 - 30)

= 2(-11) – 3(-6) + 1(2)

* Kita masukkan hasilnya ke dalam ekspresi determinan awal:

= -22 + 18 +2

= -4 + 2

= -2

* Jadi, determinan dari matriks A adalah -2.

1. **Hitung minor elemen A23**

* Minor M23 dari adalah determinan matriks 2x2 yang tersisa setelah menghapus baris kedua dan kolom ketiga:

M23 =

* Kemudian kita menghitung determinan tersebut:

= (2.8 – 3.6)

= (16 - 18)

= -2

* Jadi, minor dari elemen A23 adalah -2.

1. **Hitung kofaktor elemen A23**

* Kofaktor adalah minor dikalikan dengan (-1) i+j , di mana i+j adalah indeks baris dan kolom elemen itu sendiri.

C23 = (-1)i+j . Mij

* Setelah mengganti nilai i dan j kita dapat menghitung nilai kofaktor:

= (-1)2 +3. (-2)

= (-1)5 . (-2)

= (-1) . (-2)

= 2

* Jadi, kofaktor dari elemen A23 adalah 2.
  + - 1. Diberikan matriks 3x3 berikut:

1. Hitung determinan dari B
2. Hitung minor elemen B12
3. Hitung kofaktor elemen B12

**Penyelesaian:**

* + - * 1. **Hitung determinan dari B**
* Kita menggunakan ekspansi kofaktor pertama untuk menghitung determinan matriks B
* Kita menghitung determinan dengan menggunakan ekspansi kofaktor pertama, yang mengasumsikan pengurangan baris pertama kali ini. Kita mengalikan setiap elemen baris pertama dengan kofaktornya dan menguranginya satu per satu:

= 3

* Kita menghitung determinan untuk setiap matriks 2x2 yang dihasilkan:

= 3((4.8) − (6.7)) − 1((5.8) − (6.0)) + 2((5.7) − (4.0))

= 3((32−42)) − 1((40−0)) + 2((35−0))

* Kita masukkan hasilnya ke dalam ekspresi determinan awal:

= 3(−10) − 1(40) + 2(35)

= −30−40+70

= 0

* Jadi, determinan dari matriks B adalah 0.

1. **Hitung minor elemen B12**

* Minor M12 dari adalah determinan matriks 2x2 yang tersisa setelah menghapus baris kedua dan kolom ketiga:

M12 =

* Kemudian kita menghitung determinan tersebut:

= (1.8) − (2.7)

= 8 -14

= -6

* Jadi, minor dari elemen B12 adalah -6.

1. **Hitung kofaktor elemen B12**

* Kofaktor adalah minor dikalikan dengan (-1)i+j , di mana i+j adalah indeks baris dan kolom elemen itu sendiri.

C12 = (-1)i+j . Mij

* Setelah mengganti nilai i dan j kita dapat menghitung nilai kofaktor:

= (-1)1 + 2 . (-6)

= (-1)3 . (-6)

= (-1) . (-6)

= 6

* Jadi, kofaktor dari elemen B12 adalah 6.
  + - 1. Diberikan matrix 3x3 berikut:

1. Hitung determinan dari matriks C
2. Hitung Minor dari Elemen C21
3. Hitung Cofaktor dari Elemen C21

**Penyelesaian:**

1. Hitung determinan dari matriks C

**Langkah 1:** Kita menggunakan ekspansi kofaktor pertama untuk menghitung determinan matriks C

**Langkah 2:** Kita menghitung determinan dengan menggunakan ekspansi kofaktor pertama, yang mengasumsikan pengurangan baris pertama kali ini. Kita mengalikan setiap elemen baris pertama dengan kofaktornya dan menguranginya satu per satu:

= 1 - 0 + 0

**Langkah 3:** Kita menghitung determinan untuk setiap matriks 2x2 yang dihasilkan:

= 1(5.9 – 6.8) – 0 + 0

**Langkah 4:** Kita masukkan hasilnya ke dalam ekspresi determinan awal:

= 1(45 - 48) – 0 + 0

= 1 (-3) – 0 + 0

= -3

**Hasil:** Jadi, determinan dari matriks C adalah -3.

1. Hitung minor dari elemen C21
2. Minor M21 dari adalah determinan matriks 2x2 yang tersisa setelah menghapus baris kedua dan kolom pertama:

M21 =

1. Kemudian kita menghitung determinan tersebut:

= (2.9 – 3.8)

= 18 – 24

= -6

1. Jadi, minor dari elemen C21 adalah -6.
2. Hitung kofaktor dari elemen C21
3. Kofaktor adalah minor dikalikan dengan (-1)i+j, di mana i+j adalah indeks baris dan kolom elemen itu sendiri.

C21 = (-1)i+j . Mij

1. Setelah mengganti nilai i dan j kita dapat menghitung nilai kofaktor:

= (-1)2 + 1 . (-6)

= (-1)3 . (-6)

= -1 . (-6)

= 6

1. Jadi, kofaktor dari elemen C21 adalah 6.
2. Hitung determinan dari matriks berikut menggunakan metode determinan minor dan kofaktor  
    A =

**Penyelesaian:**

M11

M12

M13

C11 = 1+1)) . M11 = 1 . 18 = 18

C12 = 1+2)) . M12 = -1 . 8 = -8

C13 = 1+3)) . M13 = 1 . 1 = 1

Determinan dapat dihitung denga cara berikut

Det (A) = 3 - 1 + 2

Det (A) = 3(30 - 12) - 1(12 - 4) + 2(6 - 5)

Det (A) = 3(18) -1(8) + 2(1)

Det (A) = 54 – 8 + 2

Det (A) = 48

Jadi, determinan dari matriks A adalah 48

1. Hitung determinan dari matriks berikut menggunakan metode determinan minor dan kofaktor

B =

Dengan Mencari minor dari M11, M12, M13

**Penjelasan:**

* M11 = = (0 . 3) – (2 . 2) = 0 – 4 = -4

. (-4) = -4

* M12 = = (3 . 3) – (5 . 2) = 9 – 10= -1

. (-1) = 1

* M13 = = (3 . 2) – (5 . 0)= 6 – 0 = 6

. (6) = -6

Det (B) = 2(-4) – (4(-1)) + 1(6)

Det (B) = -8 – (-4) + 6

Det (B) = -8 + 4 +6

Det (B) = -4 + 6

Det (B) = 2

Jadi, determinan dari matriks B adalah 2.

1. Carilah determinan dari matriks berikut menggunakan

A =

**Penyelesaian:**

* = = (11 x 8)-(8 x 9) = 88- 72 = 16

= .16 = 16

* = = (10 x 8)-(5 x 9) = 80-45=35

= .35 = -35

* == (10x 8 )-(5x11)= 25

= = .25 = 25

Jadi determinan matriks A dengan menggunakan

= 16 -35 + 25 = 6

1. Carilah determinan dari matriks berikut menggunakan

B =

**Penyelesaian:**

* = (3.4) – (10.5) = -38

. (-38)= -38

* (10.4) - (8.6)= -8

=

* = = 16

= .(16) = 16

Maka determinan matriks B adalah

= (-38) + (-8) + 16 = - 30

1. Carilah determinan dari matriks berikut menggunakan , dan !

A=

**Penyelesaian:**

* = = (1 x 1) – (2 x 4) = 1 – 8 = -7

= x = x (-7) = 1 x (-7) = -7

* = = (3 x 1) – (2 x 2) = 3 – 4= -1

= x = x (-1) = -1 x -1 = 1

* = = (3 x 4) – (1 x 2) = 12 – 2 = 10

= x = x 10 = 1 x 10 = 10

Jadi determinan matriks A dengan menggunakan

Det A = + +

= 5 (-7) + 2 (1) + 3 (10)

= -35 + 2 + 30

= -3

1. Carilah determinan dari matriks berikut menggunakan , dan !

A=

**Penyelesaian:**

* = = (3 x (-4)) – (5 x (-7)) = -12 – (-35) = -12 + 35 = 23

= x = x 23 = 1 x 23 = 23

* = = (0 x 0) – (2 x (-4)) = 0 – (-8) = 0 + 8 = 8

= x = x 8 = -1 x 8 = -8

* = = (-2 x 0) – (2 x -7) = 0 – (-14) = 0 + 14 = 14

= x = x 14 = -1 x (-14) = 14

Jadi determinan matriks A dengan menggunakan , dan

Det A = + +

= 3 (-8) + (-4) (14) + 2(23)

= -16 + (-56) + 46

= -16 – 56 + 46

= -26

1. Tentukan M11 dan C11 dari Matriks

**Penyelesaian:**

Hilangkan baris pertama dan kolom pertama

M11 =

Hitung determinan sisa matriks

(5 X 5) – (9 X 6) = -29

Hitunglah Cofaktor dari setiap elemen matriks A :

C11 = X M11 = 1 X (-29) = -29

1. Tentukan M11 dan C11 dari Matriks 4 x 4

A =

**Penyelesaian:**

Hilangkan baris pertama dan kolom pertama dan M11 =

Hitunglah determinan sisa matriks:

M11 = [(3 x 4 x 4) + (2 x 2 x 3) + (5 x 1 x 1)] – [(2 x 1 x 4) + (3 x 2 x 1) + (5 x 4 x 3)]

M11 = [ 48 + 12 + 5] – [ 8 + 6 + 60]

M11 = 65 -74

M11 = - 9 (Hasil M11 adalah -9)

Hitunglah cofaktor dari setiap elemen matriks A:

C11 = X M11 = 1 x (-9) = -9

1. Diketahui matriks tentukan:

a. M11 dan C11

b. M12 dan C12

c. M13 dan C13**Penyelesaian:**

**a. M11 dan C11**

Cara menentukan minordari sebuah matriks adalah dengan cara menghilangkan atau mencoret kolom 1 dan baris 1 atau sesuai dengan soal yang diminta. Setelah melakukan langkah tersebut, maka kita mendapatkan matriks baru. Kemudian cari determinan dari matriks tersebut.

à = (1)(3) – (2)(2) = 3 – 4 = -1

Maka, M11 = -1  
Cara menentukan cofactor dari sebuah matriks adalah dengan rumus sebagai berikut:  
Cij = (-1)i+j det Mij Cara nya dapat dilihat dibawah

C11 = (-1)1+1 . -1 = 1

Maka, C11 = 1

Maka kita peroleh M11 = -1 dan C11 = 1

Hal yang sama dapat dilakukan untuk mencari Minor dan Cofactor lainnya

**b. M12 dan C12**

à = 0

C12 = (-1)1+2 . 0 = 0

Maka kita peroleh M12 = 0 dan C12 = 0

**c. M13 dan C13**

à = 1

C13 = (-1)1+3 . 3 = 1

Maka kita peroleh M13 = 1 dan C13 = 1

1. Diketahui matriks tentukan:

a. M22 dan C22

b. M23 dan C23

c. M31 dan C31

**Penyelesaian:**

* 1. **M22 dan C22**

à = 0

C22 = (-1)2+2 . 0 = 0

Maka kita peroleh M22 = 0 dan C22 = 0

1. **M23 dan C23**

à = -2

C23 = (-1)2+3 . -2 = 2

Maka kita peroleh M23 = -2 dan C23 = 2

1. **M31 dan C31**

à = -1

C31 = (-1)3+1 . -1 = -1

Maka kita peroleh M31 = -1 dan C31 = -1

1. Perhatikan matriks di berordo 3x3 berikut:

Hitunglah det(A) dengan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama A

**Penyelesaian:**

Untuk menghitung det(A) dapat dihitung dengan rumus berikut:

det(A) =

dengan rumus mencari nilai Cofactor adalah

C =

Maka:

det(A) =

=

= 1 . 1 + 4 . (-1) + (-3) . 1

= 1 (3.8 – 6.7) + (-4) (-2.8 – 6.1) + (-3) (-2.7 – 3.1)

= 1 (-24) + (-4) (-22) + (-3) (-17)

= 115

1. Diketahui determinan berordo 3x3 sebagai berikut:

Tentukan nilai dengan metode ekspansi kofaktor.

**Penyelesaian:**

Langkah – langkah untuk mencari adalah sebagai berikut:

1. Tentukan kofaktor dari A

Solusi:

* =

= = 1. (-23) = -23

* = = 2.4 – 5.6 = -22

= = (-1) (-22) = 22

* = = 2.(-1) – (-7).6 = 40

= = 1.40 = 40

* = = 8.4 – 4.(-1) = 36

= = (-1). 36 = -36

* = = 0.4 – 4.6 = -24

= = 1.(-24) = -24

* = = 0.(-1) – 8.6 = -48

= = (-1) (-48) = 48

* = = 8.5 – 4.(-7) = 68

= = 1.68 = 68

* = = 0.4 – 4.2 = -8

= = (-1) (-8) = 8

* = = 0.(-7) – 8.2 = -16

= = 1.(-16) = -16

1. Tentukan matriks kofaktor
2. Tentukan matriks adj(A)
3. Tentukan determinan matriks A dengan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris A pertama

= 0 - 8 + 4

= 0 – 8 (-22) + 4 (40)

= 178 + 160

= 338

Maka:

=

=

1. Tentukan minor M12 dan kofaktor A12 dari matriks A

**Penyelesaian:**

Pertama-tama, kita harus mencari minornya dulu, seperti ini:

M12 = = (2.5) – (0.-2) = 10 – 0 = 10

Setelah mendapatkan minornya, kita mencari cofactornya

C12 = -1i+j.(Mij) = -11+2.(M12) = -13.(10) = -10

Hasilnya Cofactor yaitu -10

1. Carilah Determinan dari Matriks tersebut menggunakan metode minor dan cofactor

A =

**Penyelesaian:**

Pertama-tama kita harus menentukan, di kolom atau dibaris mana yang memiliki banyak angka 0, yaitu terdapat di kolom 2:

|A| = a12.K12+a22.K22+a32.K32+a42.K42

= -4. +1. -0. +0.

= 48 – 15 + 0 + 0 = 33

Kemudian kita harus mencari determinan dari ordo 3x3, seperti ini:

Det =

= (0 . ((1.1) – (4.1))) – (-1 . ((4.1) – (4.4))) + (2 . ((4.1) – (1.4)))

= 0 -12 + 0 = -12

= (1 . ((1.1) – (4.1))) – (2 . ((-1.1)-(2.1))) + (3 . ((-1.4)-(2.4)))

= -3 + 6 -18 = -15

Barulah kita menjumlahkan seluruhnya, dan hasil determinan dari ordo 4x4 = 33

1. Carilah determinan dari matriks berikut menggunakan C11C22C33

A =

**Penyelesaian:**

Cari Minor M11, M22, M33 Terlebih Dahulu sebelum mencari Cofaktornya.

M11 = = (1.2) – (8.6) = 2 – 48 = -46

M22 = = (2.2) – (5.3) = 4 – 15 = -11

M33 = = (0.6) – (1.3) = 0 – 3 = -3

Setelah mendapatkan minornya, kita mencari cofactornya

C11 = -1i+j.(Mij) = -11+1.(M11) = -12.(-46) = -46

C22 = -1i+j.(Mij) = -12+2.(M22) = -14.(-11) = -11

C33 = -1i+j.(Mij) = -13+3.(M33) = -16.(-3) = -3

Maka determinan matriks A adalah

C11 + C22 + C33 = (-46) + (-11) + (-3) = -60

1. Carilah determinan dari matriks berikut menggunakan , dan !

A=

**Penyelesaian:**

* = = (0 x (-1)) – (2 x 3) = 0 – 6 = -6

= x = 1 x (-6) = -6

* = = (4 x (-1)) – (2 x 1) = -4 – 2= -6

= x = -1 x (-6) = 6

* = = (4 x 3) – (0 x 1) = 12 – 0 = 12

= x = 1 x 12 = 12

Jadi determinan matriks A dengan menggunakan , dan

Det A = + +

= 2(-6) + 1(6) + 3(12)

= -12 + 6 + 36

= 30

1. Tentukan determinan dari matriks dibawah ini menggunakan C21 dan C32 dan C13 Matriks

**Penyelesaian:**



Determinan Matriks A menggunakan C21,C32,C13

1. Perhatikan berordo matriks 3x3 berikut

Hitunglah det(A) dengan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris atau kolom pilihan Anda.

**Penyelesaian:**

Untuk menghitung det(A) dapat dihitung dengan rumus berikut:

det(A) =

dengan rumus mencari nilai Cofactor adalah

C =

Maka:

Det(A) =

=

= 3 . (-1) + 0 . (-1) + (-3) . (-1)

= -3 (2.4 – -1.1) + 0 + 3 (3.-1 – 2.2)

= -3 (9) + 3 (-7)

= -27 + -21

= -48

1. Tentukan semua Minor dan Cofaktor dari Matriks 3 x 3 dibawah ini

**Penyelesaian:**

C12 =

1. Diketahui matriks tentukan determinan dari M11 dan C11

**Penyelesaian:**

M11   
C11 = -1i+j.(Mij) = -12 . -1 = -1

Det = A11 C11 + A21 C21 + A31 C31  
Det = (1)(-1) + (2)(-M21) + (3)(M31)  
Det = (1)(1) + (2)(-4) + (3)(-3)

= 1 + (-8) + (-9)

= 1 - 8 – 9

= - 16

1. Carilah determinan dari matriks berikut menggunakan

B =

**Penyelesaian:**

* = (3.4)-(2.5) = -2

.(-2)= 2

* (6.4)-(2.6)= 12

=

* =

= .(12) = 12

Maka determinan matriks B adalah

= (2) + (-12) + 12 = 2

# BAB 2 EIGEN VALUE

## **Eigen Value**

|  |
| --- |
| Eigenvalue (λ) dari sebuah matriks (A) adalah solusi dari persamaan determinan  **det(𝐴−𝜆𝐼)=0**  di mana 𝐼I adalah matriks identitas yang sesuai dengan ukuran matriks 𝐴A. |

|  |
| --- |
| Dalam hal ini, 𝜆λ adalah nilai skalar yang mewakili skala perubahan yang terjadi pada eigenvector saat matriks 𝐴A dioperasikan padanya |

|  |
| --- |
| Eigen value menentukan seberapa besar matriks dapat meregang atau memampatkan vektor saat dioperasikan. Nilai eigen value yang lebih besar menunjukkan adanya perubahan yang lebih besar pada eigenvector terkait saat operasi matriks dilakukan. |

**Soal dan pembahasan**

1. Diketahui sebuah matriks

A =

Cari nilai eigen dari matriks A!

**Penyelesaian:**

* **Nilai eigen**

= 0

* Menggunakan Metode Cofaktor

- .2 = 0

−4 - + +2 = 0

**Nilai Eigen** =

1. Diketahui sebuah matriks

B =

Cari nilai eigen dari matriks B!

**Penyelesaian:**

* **Nilai eigen**

= 0

0

* Menggunakan Metode Cofaktor

Det = 0

- .2 = 0

−3 + + +4= 0

1. Diketahui nilai dari matriks

A =

Cari nilai eigen dari matriks A

**Penyelesaian:**

* **Nilai eigen**

= 0

0

Menggunakan Metode Sarrus

 = 0



Berdasarkan pada faktor dari koefisien tanpa variable 20 yaitu 1,-1,2,-2,4,-4,5,-5,20,-20.

Maka kita bisa menggunakan cara Horner untuk melanjutkan perhitungan.

**Cara Horner:**

**Didapat nilai Eigen** ;

1. **=**

**Penyelesaian:**

**Cara Horner**

**Penyelesaian:**

Nilai eigen

1. Tentukan nilai eigen dari matriks

A=

**Penyelesaian:**

Jadi, Matriiks A tidak memiliki nilai-nilai eigen

1. Diketahui sebuah matriks dengan ordo 3x3sebagai berikut.

A =

Carilah nilai eigen value dari matriks A.

**Penyelesaian:**

* **Eigen Value**

* Menggunakan Metode Saurus

= 0

=

) = 0

=

=

=

Cari nilai eigen menggunakan metode Horner

Maka didapat = 3 dan persamaan

Dikali -1

Didapat

Jadi nilai eigennya yaitu

1. Diketahui sebuah matriks dengan ordo 3x3 sebagai berikut.

A =

Cari nilai eigen value dari matriks A.

**Penyelesaian:**

* **Eigen Value**

* Menggunakan Metode Sarrus

= 0

=

) = 0

=

=

=

=

=

**Cara Horner**

Maka didapat = 5 dan persamaan

Dikali -1

Didapat

Sehingga nilai dari eigen valuenya yaitu

1. Diketahui suatu matriks mempunyai ordo 3x 3 sebagai berikut.

A =

Cari nilai eigen value dan vektor dari matriks A dari matriks diatas.

**Penyelesaian:**

* **Eigen Value**

Menggunakan Metode Sarrus

= 0

=

) = 0

=

=

=

=

=

=

|  |
| --- |
| 1. Carilah nilai eigen dari matriksA =   **Penyelesaian:** |

* Nilai eigen  
  det (A - ) = 0

det= 0  
det = 0

det = 0

* cari faktor menggunakan metode Saurus
* Cari nilai Eigen dengan **cara Horner**

4 Bisa dibagi (-1, 1, -2, 2, -4, 4)

Maka didapat dan persamaan:

-

Didapat

jadi nilai eigennya yaitu

1. Diketahui nilai dari matriks

A =

Cari nilai eigen dari matriks A

**Penyelesaian:**

* **Nilai eigen**

= 0

0

Menggunakan Metode Sarrus

 = 0



Berdasarkan pada faktor dari koefisien tanpa variable 20 yaitu 1,-1,2,-2,4,-4,5,-5,20,-20.

Maka kita bisa menggunakan cara Horner untuk melanjutkan perhitungan.

**Cara Horner**

**Didapat nilai Eigen**;

1. Tentukan nilai eigen dari matriks

**Penyelesaian:**

Nilai eigen

1. Tentukan nilai eigen dari matriks

A=

**Penyelesaian:**

Jadi, Matriks A tidak memiliki nilai – nilai eigen

1. Carilah nilai eigen dari matriks  
     
    B =   
   **Penyelesaian:**

* Nilai eigen

det (A – I ) = 0  
det

Det

Det = 0

(3 - ) (3 -) (3 -) + 1 + 1 – (3 – ) = 0  
(- + 1+ 1- ( 3 - )

(-) – (9 - 3)

(-)

-

* Cara Horner  
  20 bisa dibagi 1, -1 , -2, 2, -4, 4, -5, 5, -10, 10, -20, 20

-  
( ) ( )

Nilai Eigennya adalah

1. Tentukan Nilai Eigen Value untuk maktiks

**=**

**Penyelesaian:**

**Cara Horner:**

1. Carilah nilai eigen dari matriks berikut  
   c =

**Penyelesaian:**

* Nilai Eigen  
  Det () = 0  
  Det   
  Det = 0

Det = 0  
   
  
() (4 - ) (4 – ) + 1 + 1 – ( 4 - ) = 0  
(16 - ) (4 - ) + 2 – (12 - 3 ) = 0  
64 – 16 = 0  
- = 0

Cari nilai eigen dengan **metode horner**

() ( )  
Jadi nilai eigen nya adalah

1. Diketahui suatu matriks

A =

Cari nilai eigen value dari matriks A!

**Penyelesaian:**

**Eigen Value:**

det = 0

det = 0

det = 0

Menggunakan Metode Sarrus :

= 0

=

=

=

= = 0

Maka didapat karakteristik

1. Diketahui suatu matriks

A =

Cari nilai eigen value dari matriks A!

**Penyelesaian:**

**Eigen Value:**

det = 0

det = 0

det = 0

Menggunakan Metode Sarrus :

= 0

=

=

= = 0

Maka didapat karakteristik

1. Diketahui suatu matriks

A =

Cari nilai eigen value dari matriks A!

**Penyelesaian:**

**Eigen Value:**

det = 0

det = 0

det = 0

Menggunakan Metode Sarrus :

= 0

=

=

Maka didapat karakteristik

1. Diketahui sebuah matriks

A =

Cari nilai eigen vektor dari matriks A!

**Penyelesaian:**

* **Nilai eigen**

= 0

0

Menggunakan Metode Cofaktor

- .2 = 0

−4 - + +2 = 0

**Nilai Eigen** =

## **Eigen Vektor**

|  |
| --- |
| Eigenvector (v) dari sebuah matriks (A) adalah vektor non-nol yang memenuhi persamaan  𝐴𝑣=𝜆𝑣A**v**=λ**v**  di mana 𝑣**v** adalah vektor eigenvector dan 𝜆λ adalah eigenvalue yang sesuai.Persamaan ini menyatakan bahwa ketika matriks 𝐴A dioperasikan pada eigenvector 𝑣**v**, hasilnya adalah skalar 𝜆λ kali 𝑣**v**. Artinya, eigenvector hanya mengalami perubahan skala, tanpa mengubah arahnya, ketika dioperasikan oleh matriks 𝐴A.Konsep eigenvector penting dalam analisis matriks karena mereka mewakili arah yang tetap (stabil) dalam sistem yang berubah |

1. Diketahui suatu matriks

A =

Cari nilai eigen value dari matriks A!

**Penyelesaian:**

* **Eigen Value**

Menggunakan Metode Sarrus

= 0

=

) = 0

=

=

=

Cara Horner

Maka didapat = 2 dan persamaan

Dikali -1

Didapat

Jadi nilai eigennya yaitu

* **Eigen Vektor**

Untuk

=

=

Didapat persamaan

Misal dan , didapat persamaan:

=

= + t

Jika s = 1 dan t = 1, didapat vektor eigen:

1. Diketahui suatu matriks

A =

Cari nilai eigen value dari matriks A!

**Penyelesaian:**

* **Eigen Value**

Menggunakan Metode Sarrus

= 0

=

) = 0

=

=

=

=

=

**Cara Horner:**

Maka didapat = 4 dan persamaan

Dikali -1

Didapat

Jadi nilai eigennya yaitu

* **Eigen Vektor**

Untuk

=

=

Didapat persamaan

Misal dan , didapat persamaan:

=

= + t

Jika s = 1 dan t = 1, didapat vektor eigen:

1. Diketahui suatu matriks

A =

Cari nilai eigen value dan vektor dari matriks A!

**Penyelesaian:**

* **Eigen Value**

Menggunakan Metode Sarrus

= 0

=

) = 0

=

=

=

=

=

=

**Cara Horner:**

Maka didapat = 2 dan persamaan

Dikali -1

Didapat

Jadi nilai eigennya yaitu

* **Eigen Vektor**

Untuk

=

=

Dibuat persamaan

Didapat persamaan:

→

→ →

Misal , didapat persamaan:

Jika s = 1 didapat vektor eigen:

1. Diketahui sebuah matriks

A =

Cari nilai eigen vektor dari matriks A!

**Penyelesaian:**

* **Nilai eigen**

= 0

0

Menggunakan Metode Cofaktor

- .2 = 0

−4 - + +2 = 0

**Nilai Eigen** =

# BAB 3 LU-DECOMPOSITION

Hingga saat ini, fokus pada dua metode untuk menyelesaikan sistem linier, eliminasi Gaussian (pengurangan ke bentuk eselon baris) dan eliminasi Gauss-Jordan (pengurangan ke bentuk eselon baris yang dikurangi). Meskipun metode ini baik untuk masalah skala kecil dalam teks ini, mereka tidak cocok untuk masalah skala besar di mana kesalahan pembulatan komputer, penggunaan memori, dan kecepatan menjadi perhatian. Pada bagian ini kita akan membahas metode untuk menyelesaikan sistem linier n persamaan dalam n yang tidak diketahui yang didasarkan pada pemfaktoran matriks koefisiennya menjadi produk matriks segitiga bawah dan atas. Metode ini, yang disebut "LU-dekomposisi," adalah dasar bagi banyak algoritma komputer yang umum digunakan

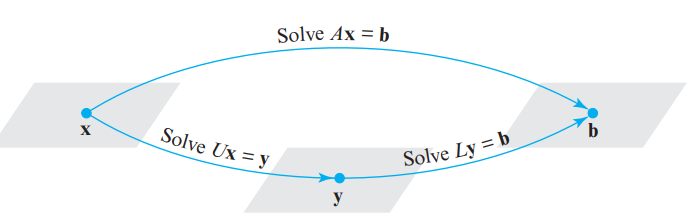
|  |
| --- |
| **DEFINISI 1** Faktorisasi matriks persegi A sebagai A = LU (1) di mana L adalah segitiga bawah dan U adalah segitiga atas, disebut dekomposisi LU (atau faktorisasi LU) dari A |

|  |
| --- |
| **Metode LU-Dekomposisi**  **Langkah 1.** Tulis ulang sistem Ax = b sebagai LUx = b  **Langkah** **2**. Tentukan matriks n × 1 y baru dengan Ux = y  **Langkah 3**. Gunakan (3) untuk menulis ulang (2) sebagai Ly = b dan selesaikan sistem ini untuk y.  **Langkah 4.** Ganti y dalam (3) dan selesaikan x |

Prosedur ini, yang diilustrasikan pada Gambar 1. Ilustrasi Prosedur LU-Decomposition menggantikan sistem linier tunggal **Ax** **= b** oleh sepasang sistem linier

**Ux = y**

**Ly = b**

yang harus diselesaikan secara berurutan. Namun, karena masing-masing sistem ini

memiliki matriks koefisien segitiga, umumnya ternyata tidak melibatkan perhitungan lebih untuk menyelesaikan dua sistem daripada menyelesaikan sistem asli secara langsung.

Gambar 2 Ilustrasi Prosedur LU-Decomposition

## **An LU-Decomposition**

|  |
| --- |
| Solusi Untuk mendapatkan dekomposisi LU, A = LU, kita akan mengurangi A menjadi eselon baris dari U menggunakan eliminasi Gaussian dan kemudian menghitung L. |

1. Tentukan L dan U sehingga A = LU.

Dengan matriks A =

**Penyelesaian:**

Untuk mendapatkan L dan u dapat menggunakan metode eliminasi Gauss.

Tahap Pertama:

R2 = R2 – 4R1 ⇒

R3 = R3 – 7R1 ⇒

Tahap Kedua:

R3 = R3 - 2R2 ⇒

Dapat ditentukan L dan U:

L =

U =

1. Diberikan Matriks A berikut:

A =

Hitunglah L dan U sehingga A = LU.

**Penyelesaian:**

Untuk mendapatkan L dan U dapat menggunakan metode eliminasi Gauss.

**Tahap Pertama:**

R2 = R2 – 2R1 ⇒

R3 = R3 – 4R1 ⇒

**Tahap Kedua:**

R3 = R3 - 3R2 ⇒

Dapat ditentukan L dan U:

L =

U =

1. Diberikan Matriks A berikut:

A =

Hitunglah L dan U sehingga A = LU.

**Penyelesaian:**

Untuk mendapatkan L dan U dapat menggunakan metode eliminasi Gauss.

**Tahap Pertama:**

R2 = R2–2R1 ⇒

R3 = R3 – R1 ⇒

**Tahap Ke-dua:**

= R3 - 3R2 ⇒

Dapat ditentukan L dan U:

L =

U =

1. Tentukan LU-Decomposition dari matriks berikut.

**Penyelesaian:**

Dalam menyelesaikan soal diatas, pertama kita perlu untuk memperoleh elemen dalam matriks U dan kita dapat menggunakan Metode Eliminasi Gauss.

B2-2B1

B3-3B1

B3-5B2

Maka, U =

Kedua, mencari elemen untuk matriks L.

B2-2B1

B3-3B1

B3-5B2

Maka, L =

Dari sini kita dapat menentukan 𝐿 dan 𝑈:

L = U =

1. Diberikan matriks berikut:

Hitunglah dan sehinga =

**Penyelesaian:**

Dalam menyelesaikan soal diatas, pertama kita perlu untuk memperoleh elemen dalam matriks U dan kita dapat menggunakan Metode Eliminasi Gauss.

B2-2B1

B3-3B1

B3-B1

Maka, U =

Kedua, mencari elemen untuk matriks L.

B2-2B1

B3-3B1

B3-B1

Maka, L =

Dari sini kita dapat menentukan 𝐿 dan 𝑈:

L = U =

1. Diberikan matriks berikut:

Hitunglah dan sehinga =

**Penyelesaian:**

Dalam menyelesaikan soal diatas, pertama kita perlu untuk memperoleh elemen dalam matriks U dan kita dapat menggunakan Metode Eliminasi Gauss.

B2-B1

B3-B1

B3-B2

Maka, U =

Kedua, mencari elemen untuk matriks L.

B2-B1

B3-B1

B3-B2

Maka, L =

Dari sini kita dapat menentukan 𝐿 dan 𝑈:

L = U =

1. Temukan Dekomposisi LU dari

A=

**Penyelesaian:**

**Gunakan persamaan A=LU**

L=

–+ L=

2x+ L=

1/3x+ L=

= U

**A=LU**

=

1. Temukan Dekomposisi LU dari

A=

**Penyelesaian:**

**Gunakan persamaan A=LU**

L=

–4x+ L=

-3x+ L=

5x+2x L=

= U

**A=LU** =

1. Temukan Dekomposisi LU dari

A=

**Penyelesaian:**

**Gunakan persamaan A=LU**

L=

–2x+ L=

-3x+ L=

-1/14x L=

= U

**A=LU** =

|  |
| --- |
| **Prosedur untuk Membangun Dekomposisi LU**  **Langkah 1.** Kurangi A menjadi eselon baris dari U dengan eliminasi Gaussian tanpa pertukaran baris, lacak pengali yang digunakan untuk memperkenalkan 1 di depan dan pengali yang digunakan untuk memperkenalkan nol di bawah 1 di depan.  **Langkah 2.** Di setiap posisi di sepanjang diagonal utama L, tempatkan kebalikan dari pengali yang memperkenalkan 1 terdepan di posisi itu di U.  **Langkah 3.** Pada setiap posisi di bawah diagonal utama L, tempatkan negatif dari pengali yang digunakan untuk memperkenalkan nol pada posisi tersebut di U.  **Langkah 4.** Bentuk dekomposisi A = LU. |

## **Solving Ax = b by LU-Decomposition**

|  |
| --- |
| Ketika menyelesaikan sistem persamaan linear (Ax=b), LU-Decomposition digunakan karena memecah matriks (A) menjadi dua matriks segitiga, L (segitiga bawah) dan U (segitiga atas), memungkinkan penyelesaian yang lebih efisien, penggunaan kembali matriks koefisien (A) untuk berbagai vektor (b), meningkatkan stabilitas numerik saat menangani matriks besar atau mendekati singularitas, serta memungkinkan analisis yang lebih baik terhadap sifat-sifat matriks (A), menjadikannya metode yang sangat berguna dalam berbagai aplikasi ilmu pengetahuan dan teknologi. |

* + - 1. Selesaikan SPL berikut ini dengan menggunakan metode Dekomposisi LU dengan :

**Penyelesaian:**

**Langkah pertama:**

Ubahlah bentuk sistem persamaan linear diatas ke dalam bentuk matriks.

A = X = b =

**Langkah ke-dua:**

Langkah selanjutnya, carilah matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Pertama kita akan mengubah matriks A ke dalam bentuk matriks segitiga atas (U) dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE).

→ B1

→ B1 – B2

→ 2B1 – B3

→ B2

→ B3

= U

**Langkah ke-tiga:**

Langkah selanjutnya, kita akan mengubah kembali matriks A menjadi segitiga bawah (L). Matriks L merupakan suatu matriks berdiagonal satu dengan segitiga atas dan segitiga bawah matriks tersebut dihasilkan dari pengurangan angka pada tiap kolom yang di nol-kan.

Matriks L =

Maka di peroleh:

Matriks L =

**Langkah keempat:**

Langkah selanjutnya, misalkan dimana A = LU yang dapat diartikan sebagai atau LUX = b. Kemudian misalkan UX = y dimana Ly = b.

**Ly = b**

L = b =

**Langkah kelima:**

Kita masukkan ke **Ux = y**

U =  b =

Jadi, solusi yang kita peroleh untuk sistem persamaan linear diatas adalah x =

1. Diberikan matriks koefisien A dan vector kolom b sebagai berikut:

A = , b =

a) Tentukan faktorisasi LU dari matriks A.

b) Dengan menggunakan faktorisasi LU , carilah solusi dari sistem persamaan .

**Penyelesaian:**

a) Faktorisasi LU dari matriks A dapat dicari dengan melakukan proses eliminasi Gauss.

Dari proses eliminasi Gauss, diperoleh:

L = , U =

b) Setelah mendapatkan faktorisasi LU, kita dapat menyelesaikan sistem persamaan dengan langkah-langkah berikut:

* Langkah pertama :

Ly = b

=

Dari substitusi maju, kita peroleh :

,

* Langkah kedua :

Ux = y

=

Dari substitusi mundur, kita peroleh :

,

Jadi, solusi dari sistem persamaan Ax = b adalah x =

1. Diberikan matriks koefisien A dan vector kolom b sebagai berikut:

A =  , b =

a) Tentukan faktorisasi LU dari matriks A.

b) Dengan menggunakan faktorisasi LU, carilah solusi dari sistem persamaan

.

**Penyelesaian:**

1. Faktorisasi LU dari matriks A dapat dicari dengan melakukan proses eliminasi Gauss.

Langkah-langkah:

Dari proses eliminasi Gauss, diperoleh:

,

1. Setelah mendapatkan faktorisasi *LU ,* kita dapat menyelesaikan sistem persamaan

**Langkah pertama:**

Ly = b

=

Dari subtitusi maju, kita peroleh:

,

,

**Langkah kedua:**

Ux = y

=

Dari subtitusi mundur, kita peroleh:

Jadi, solusi dari sistem persamaan Ax = b adalah x

1. Diberikan matriks koefisien A dan vector kolom *b* sebagai berikut :

, ***b*** =

1. Tentukan faktorisasi LU dari matriks A
2. Dengan menggunakan faktorisasi LU, carilah solusi dari sistem persamaan

**Penyelesaian:**

1. Faktorisasi LU dari matriks A dapat dicari dengan melakukan proses Eliminasi Gauss

Langkah-langkahnya adalah:

**Langkah pertama:** Tentukan matriks L yang merupakan matriks segitiga bawah dengan diagonal utama 1.

**Langkah kedua:** Tentukan matriks U yang merupakan matriks segitiga atas

**Langkah ketiga:** Dari proses eliminasi gauss, dapatkan matriks L dan U sehingga

Proses Eliminasi Gauss:

Dari proses Eliminasi Gauss, diperoleh:

,

1. Setelah mendapatkan faktorisasi LU, kita dapat menyelesaikan system persamaan dengan Langkah-langkah berikut :
2. Selesaikan untuk mendapatkan *y* dengan menggunakan subsitusi maju
3. Selesaikan untuk mendapatkan *x* dengan menggunakan subsitusi mundur

Mari kita hitung :

**Langkah pertama:**

=

Dari subsitusi maju, kita peroleh:

, ,

**Langkah kedua:**

=

Dari subsitusi mundur, kita peroleh :

, =2, = 2

Jadi, solusi dari system persamaan adalah *x =*

1. Diberikan matriks koefisien A dan vector kolom *b* sebagai berikut :

1. Tentukan faktorisasi *LU* dari matriks *A*
2. Dengan menggunakan faktorisasi *LU,* carilah solusi dari system persamaan

**Penyelesaian:**

1. Faktorisasi *LU* dari matriks A dapat dicari dengan melakukan proses Eliminasi Gauss

Dari proses Eliminasi Gauss, diperoleh :

1. Setelah mendapatkan faktorisasi *LU,* kita dapat menyelesaikan system persamaan

**Langkah pertama:**

*=*

Dari subsitusi maju, kita peroleh:

,

**Langkah kedua:**

*=*

Dari subsitusi mundur, kita peroleh:

,

Jadi, solusi dari system persamaan adalah *x =*

1. Diberikan matriks koefisien A dan vector kolom *b* sebagai berikut :

, ***b*** =

1. Tentukan faktorisasi *LU* dari matriks *A*
2. Dengan menggunakan faktorisasi *LU,* carilah solusi dari system persamaan

**Penyelesaian:**

1. Faktorisasi *LU* dari matriks A dapat dicari dengan melakukan proses Eliminasi Gauss

Dari proses Eliminasi Gauss, diperoleh :

,

1. Setelah mendapatkan faktorisasi *LU,* kita dapat menyelesaikan system persamaan

**Langkah pertama :**

*=*

Dari subsitusi maju, kita peroleh :

, ,

**Langkah kedua :**

*=*

Dari subsitusi mundur, kita peroleh :

, ,

Jadi, solusi dari system persamaan adalah *x* =

1. Diberikan matriks koefisien A dan vector kolom b sebagai berikut:

A = , b =

a) Tentukan faktorisasi LU dari matriks A.

b) Dengan menggunakan faktorisasi LU , carilah solusi dari sistem persamaan .

**Penyelesaian:**

a) Faktorisasi LU dari matriks A dapat dicari dengan melakukan proses eliminasi Gauss.

Dari proses eliminasi Gauss, diperoleh:

L = , U =

b) Setelah mendapatkan faktorisasi LU, kita dapat menyelesaikan sistem persamaan dengan langkah-langkah berikut:

Langkah Pertama:

=

Dari substitusi maju, kita peroleh:

y1 = 5, y2 = 11 – 3(5) = -4

Langka kedua:

=

Dari substitusi mundur, kita peroleh:

= -2, = 5 – 2(-2) = 9

Jadi, solusi dari sistem persamaan Ax = b adalah x =

1. Diberikan matriks koefisien A dan vector kolom b sebagai berikut:

A =  , b =

a) Tentukan faktorisasi LU dari matriks A.

b) Dengan menggunakan faktorisasi LU, carilah solusi dari sistem persamaan .

**Penyelesaian:**

1. Faktorisasi LU dari matriks A dapat dicari dengan melakukan proses eliminasi Gauss.

Langkah-langkah:

Dari proses eliminasi Gauss, diperoleh:

,

1. Setelah mendapatkan faktorisasi *LU,* kita dapat menyelesaikan sistem persamaan

Langkah pertama:

=

Dari subtitusi maju, kita peroleh:

= 4,

= 2 + (4) = 4,

= 1 + (4) = 3

Langkah kedua:

=

Dari subtitusi mundur, kita peroleh:

Jadi, solusi dari sistem persamaan adalah x

1. Diberikan matriks koefisien A dan vector kolom *b* sebagai berikut :

, ***b*** =

a) Tentukan faktorisasi LU dari matriks A

b) Dengan menggunakan faktorisasi LU, carilah solusi dari sistem persamaan

**Penyelesaian:**

a.Faktorisasi LU dari matriks A dapat dicari dengan melakukan proses Eliminasi Gauss

Proses Eliminasi Gauss :

Dari proses Eliminasi Gauss, diperoleh :

,

b.Setelah mendapatkan faktorisasi LU, kita dapat menyelesaikan system persamaan dengan Langkah-langkah berikut :

1. Selesaikan *Ly = b* untuk mendapatkan *y* dengan menggunakan subsitusi maju
2. Selesaikan *Ux = y* untuk mendapatkan *x* dengan menggunakan subsitusi mundur

Mari kita hitung :

**Langkah 1 :**

*Ly = b*

=

Dari subsitusi maju, kita peroleh :

*= 5, = 0 - (5) =- , = 2 – (0) – ( - ) =*

**Langkah 2 :**

=

Dari subsitusi mundur, kita peroleh :

*=- , =- , = = + =*

Jadi, solusi dari system persamaan adalah *x =*

|  |
| --- |
| LU-Decomposition Matriks 𝐴A dipecah menjadi dua matriks 𝐿L dan 𝑈U seperti ini:  𝐴=𝐿𝑈  Dimana 𝐿L adalah matriks segitiga bawah (lower triangular) dengan diagonal utama bernilai 1, dan 𝑈U adalah matriks segitiga atas (upper triangular) |

|  |
| --- |
| Substitusi Maju (Forward Substitution): Dengan menggunakan matriks 𝐿*L*, kita mendapatkan solusi untuk sistem persamaan linier 𝐿𝑦=𝑏*Ly*=*b*, dimana 𝑦*y* adalah vektor baru. |

|  |
| --- |
| Substitusi Maju (Forward Substitution): Dengan menggunakan matriks 𝐿L, kita mendapatkan solusi untuk sistem persamaan linier 𝐿𝑦=𝑏Ly=b, dimana 𝑦y adalah vektor baru. |

Dengan menggunakan LU-Decomposition, kita dapat memecahkan sistem persamaan linear dengan efisien, terutama jika kita perlu memecahkan sistem yang sama untuk berbagai vektor konstanta 𝑏*b*, karena dekomposisi matriks 𝐴*A* hanya perlu dilakukan sekali.

1. Tentukan matriks yang mendiagonalkan A =

Penyelesaian:

Persamaan Karakteristik dari matriks A adalah:

**|λ.I - A| = 0**

atau

det = 0

=> det = 0

* Mencari espansi kofaktor : memilih baris

+ (-1) + (-1)

= .

= . . - 1)

= . ( + 1 - 1 )

= . ()

Maka, = 0, =1 dan =2

* **Untuk = 0**

=>

untuk baris 1 : -1B1,

untuk baris 2: B2 X (- B1)

untuk baris 3: B3 + B2

untuk baris 1: B1 -B2

=> x1 = 0

x2 + x3 = 0

x2 = -x3

Maka, x2 = t, x3 = -t => = 0 =

* **Untuk = 1**

=>

untuk baris 1 : B1 x B3, untuk baris 2: -1B

untuk baris 3: B3 + B1

=> x1 = t

x2 = 0

X3 = 0

Maka, = 1 =

* **Untuk = 2**

=>

untuk baris 1 : B1 + B2

untuk baris 1 : B1 + 2B3

=> x1 = 0

x2 - x3 = 0

x2 = x3

=> x2 = t ; x3 = t

Maka, = 2 =

+ + = 0

=

Jadi {,,} merupakan himpunan yang bebas linear

Maka, matriks yang mendiagonalkan A yaitu :

Matriks diagonal yang dihasilkan:

**D = AP**

**=**  => 0 + 1 + 0

= 0 + 1(1+1) + 0 = 2

Maka

**AP =>**

Matriks diagonal yang dihasilkan yaitu :

1. Tentukan matriks E yang mendiagonalisasi A =

**Penyelesaian:**

Persamaan karakteristik matriks A adalah **|λ.I - A| = 0**

det = 0

=> det = 0

= () + 2(-1)(-1)

=

Maka =1 dan =2

* **Untuk = 1**

E(1) =

* **Untuk = 2**

E(2) = +

Maka E = =>  **=**

Maka untuk memastikan bahwa E mendiagonalisasikan A :

D = **AE**

**=**

=

1. Diketahui matriks

Carilah matriks P yang mendiagonalisasi A.

JAWAB :

1. Carilah eigen valuenya
2. Carilah eigen vektornya

0

*Misalkan = t*

0

Maka, didapatkan hasil sebagai berikut :

*Sehingga, akan mendiagonalkan matriks A*

1. Tentukan P-1
2. Maka, tentukan

!

1. Diketahui matriks

Carilah matriks P yang mendiagonalisasi A.

JAWAB :

1. Carilah eigen valuenya
2. Carilah eigen vektornya

0

*Misalkan = t*

0

*Misalkan = t*

Maka, didapatkan hasil sebagai berikut :

*Sehingga, akan mendiagonalkan matriks A*

1. Tentukan P-1
2. Maka, tentukan

!

1. Diberikan matrisk A sebagai berikut

A=

Tentukan diagonalisasi dari matriks tersebut!

Jawab :

Rumus mencari diagonalisasi adalah D=

Penjelasan

* Untuk mendapatkan nilai dari P hal pertama yang dilakukan adalah mencari nilai eigen value dan eigen vector dari matriks A
* Eigen value

Rumus: det(*Λi – A)=0*

*det = 0*

*det = 0*

*det = 0*

{()(

{

{

Nilai dari Eigen valuenya

* Eigen Vektor

Rumus ( *I – A)X=0*

*Untuk*

*=0*

Mencari nilai dan untuk

mis:

Untuk diambil persamaan dari mencari nilai

Jadi untuk nilai

*Untuk*

*=0*

Mencari nilai dan untuk

mis:

Untuk diambil persamaan dari mencari nilai

Jadi untuk nilai

Jadi untuk nilai P =

Sekarang mencari nilai Diagonalisasinya

* Pertama cari invers dari matriks P

Dengan

* Sekarang kita cari Diagonalisaisnya

D=

1. Carilah diagonalisasi dari matriks berikut

Jawab :

Rumus mencari diagonalisasi adalah D=

Penjelasan

* Untuk mendapatkan nilai dari P hal pertama yang dilakukan adalah mencari nilai eigen value dan eigen vector dari matriks A
* Eigen value

Rumus: det(*Λi – A)=0*

*= 0*

= 0

= 0

Untuk mencari nilai det dari matrisk 3 × 3 menggunakan metode sarus

Nilai dari Eigen valuenya

* Eigen Vektor

Rumus ( *I – A)X=0*

*Untuk*

Mencari nilai dan dan untuk

*Untuk*

Mencari nilai dan dan untuk

*Untuk*

Mencari nilai dan dan untuk

Jadi untuk nilai P =

Sekarang mencari nilai Diagonalisasinya

* Pertama cari invers dari matriks P

Dengan

* Sekarang kita cari Diagonalisaisnya

D=

1. Tentukan diagonalisasi dari matris

Jawab :

Rumus mencari diagonalisasi adalah D=

Penjelasan

* Untuk mendapatkan nilai dari P hal pertama yang dilakukan adalah mencari nilai eigen value dan eigen vector dari matriks A
* Eigen value

Rumus: det(*Λi – A)=0*

*= 0*

= 0

= 0

Untuk mencari nilai det dari matrisk 3 × 3 menggunakan metode sarus

- +

Nilai dari Eigen valuenya

* Eigen Vektor

Rumus ( *I – A)X=0*

*Untuk*

Mencari nilai dan dan untuk

*Untuk* 1

Mencari nilai dan dan untuk

*Untuk*

Mencari nilai dan dan untuk

Jadi untuk nilai P =

Sekarang mencari nilai Diagonalisasinya

* Pertama cari invers dari matriks P

Dengan

* Sekarang kita cari Diagonalisaisnya

D=

1. Misalnya, jika

A=

Carilah persamaan karakteristik *A*

Substitusikan matriks A:

; ;

sehingga λ = 3 adalah satu-satunya nilai eigen 𝐴. Namun 𝐴 jelas dapat didiagonalisasi karena dengan 𝑃=𝐼, maka

1. Misalkan kita punya matriks A =

Kita cari eigen values dari matriks A dengan mencari solusi dari persamaan karakteristik:

Jadi, eigenvalues dari matriks A adalah

Untuk

Kita cari vektor eigen dengan mencari solusi dari persamaan :

=

Persamaan ini menunjukkan bahwa x=z dan y=0.sehingga,vector eigen yang sesuai dengan bisa di ambil sebagai .

Selanjutnya, kita cari vektor eigen untuk 𝜆=2*λ*=2. Untuk nilai eigen yang berbeda, vektor eigen dapat ditentukan dengan mencari solusi dari (𝐴−2𝐼)=0(*A*−2*I*)**v**=0:

Dari sini kita mendapatkan x=z dan y=0.Maka,eigenvector yang sesuai denganadalah .

Kita bentuk matriks P dari vekktor vector eigen yang kita temukan

Kita bentuk Diagonal D dengan eigenvalues sebagai elemen diagonal:

P bisa di invers karena determinannya tidak nol:

Dengan demikian

1. Carilah matriks 𝑃 yang mendiagonalkan A=

**Pembahasan:**

Nilai-nilai eigen dari matriks 𝐴 adalah λ = 1 dan λ = 5. Adapun vektor-vektor berikut

membentuk sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan λ=5 , dan

adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan λ=1. Dengan mudah anda dapat memeriksa bahwa {,,}  bebas linear, sehingga

P=

akan mendiagonalkan 𝐴. Sebagai pemeriksaan, anda harus membuktikan bahwa

Tidak ada urutan yang diistimewakan untuk kolom-kolom P. Karena entri diagonal ke-i dari  adalah nilai eigen untuk vektor kolom ke-i dari P, maka dengan mengubah urutan kolom-kolom P hanyalah mengubah urutan nilai-nilai eigen pada diagonal  . Jadi, seandainya kita tuliskan

di dalam contoh terakhir, maka kita akan memperoleh

 =

1. Diagonalisasikan Matriks Berikut

Carilah Matriks P yang mendiagonalisasikan A

Jawaban :

1. Cari nilai Eigen value

(

(

Maka Diperoleh:

1. Carilah eigen Vektornya

Maka, didapatkan hasil sebagai berikut:

Maka, didapatkan hasil sebagai berikut:

1. Tentukan dari matriks P
2. Tentukan

=

=

=

1. Diagonalisasikan Matriks Berikut

Carilah Matriks P yang mendiagonalisasikan A

Jawaban :

(i) Tentukan Eigen value dahulu

* Cari Determinan Dengan Metode Kofaktor

Maka diperoleh:

1. Cari nilai Vektor Vektor eigen

Diperoleh persamaan:

Diperoleh persamaan:

Diperoleh persamaan:

Maka Diperoleh matriks P =

1. Tentukan dari matriks P
2. Tentukan
3. Carilah Matriks P yang mendiagonalkan matriks berikut

Jawaban :

1. Cari nilai Eigen value

* Cari Determinan Dengan Metode Saurus

Gunakan metode horner untuk menemukan nilai lambda yang memungkinkan

()()

Maka diperoleh:

1. Cari nilai Vektor Vektor eigen

Diperoleh persamaan:

Lakukan Operasi OBE untuk menyederhanakannya:

Diperoleh persamaan:

Lakukan Operasi OBE untuk menyederhanakannya:

Diperoleh persamaan:

Maka Diperoleh matriks P =